详细解答

STEP I 2007，第 4 题

纯数学 · 二次方程的公共根

> **STEP I 2007，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q4

关键思路

第一部分是 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 的经典因式分解（factorisation）：一旦知道 $x+b+c$ 是因式，比较系数便可得出那个二次式。第二部分有两个二次方程共用一个根。标准的做法是*消去*（eliminate）：把两条方程组合起来，使 k 的其中一个幂消去。用两种不同的方法这样做，便可把 k 和 k^2 写成比的形式，然后由 $k^2=(k)^2$ 得出一个只涉及系数的关系式。这个关系式原来就是第一部分取 $x=a$ 的情况。

解答

因式分解

把 $x=-(b+c)$ 代入 $P(x)=x^3-3xbc+b^3+c^3$：

$$\begin{aligned}P(-b-c)&=-(b+c)^3+3bc(b+c)+b^3+c^3\\&=-(b^3+3b^2c+3bc^2+c^3)+3b^2c+3bc^2+b^3+c^3=0,\end{aligned}$$

所以根据因式定理（factor theorem），$x+b+c$ 是因式。比较系数（P 的 x^2 项为零，常数项为 b^3+c^3）可得

$$x^3-3xbc+b^3+c^3=(x+b+c)\,\mathrm{Q}(x),\qquad \mathrm{Q}(x)=x^2+b^2+c^2-xb-bc-cx.$$

把右边展开即可确认：x^2 项是 $x^2(b+c)-x^2(b+c)=0$，x 项合并后是 $-3bcx$，而常数项是 b^3+c^3。

至于平方和，x^2、b^2、c^2 各在 $2\mathrm{Q}(x)$ 中出现两次，而每个交叉项则以 $-2xb$ 等形式出现，所以

$$2\mathrm{Q}(x)=(x-b)^2+(b-c)^2+(c-x)^2.$$

公共根

由于 k 是两条方程的根，

$$ak^2 + bk + c = 0, \tag{1}$$
$$bk^2 + ck + a = 0. \tag{2}$$

要消去 k^2，取 $b \times (1) - a \times (2)$：

$$(b^2 - ac)k + bc - a^2 = 0, \qquad \text{所以} \qquad (ac - b^2)\,k = bc - a^2.$$

若改为消去 k 项，则取 $c \times (1) - b \times (2)$：

$$(ac - b^2)k^2 + c^2 - ab = 0, \qquad \text{所以} \qquad (ac - b^2)\,k^2 = ab - c^2.$$

这就是涉及 k^2 的类似式子。

现在利用 $k^2 = k \cdot k$。由于 $ac \neq b^2$，我们可以除以 $ac - b^2$，得 $k = \dfrac{bc - a^2}{ac - b^2}$，于是

$$(ac - b^2)\,\frac{(bc - a^2)^2}{(ac - b^2)^2} = ab - c^2 \quad \Longrightarrow \quad (ac - b^2)(ab - c^2) = (bc - a^2)^2,$$

其中最后一步是把全式乘以 $ac - b^2$。这就是所求的结果。

把两边展开，

$$a^2bc - ac^3 - ab^3 + b^2c^2 = b^2c^2 - 2a^2bc + a^4,$$
$$\text{所以} \quad 0 = a^4 + ab^3 + ac^3 - 3a^2bc = a\left(a^3 - 3abc + b^3 + c^3\right).$$

由于 $a \neq 0$，我们得到 $a^3 - 3abc + b^3 + c^3 = 0$，正如所求。

想一想 我们在哪里见过 $a^3 - 3abc + b^3 + c^3$?

它就是第一部分取 $x = a$ 的情况。所以

$$(a + b + c)\,\mathrm{Q}(a) = 0, \qquad 2\mathrm{Q}(a) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2.$$

因此，要么 $a + b + c = 0$，要么 $\mathrm{Q}(a) = 0$。

情况 $\mathrm{Q}(a) = 0$。因为 a、b、c 是实数，三个平方都是非负的，而它们的和为零，只可能是每一个都为零。所以 $a = b = c$，两条方程都是 $a(y^2 + y + 1) = 0$：它们完全相同。

情况 $a + b + c = 0$。把 $c = -a - b$ 代入 k 的公式：

$$bc - a^2 = -ab - b^2 - a^2, \qquad ac - b^2 = -a^2 - ab - b^2,$$

所以 $bc - a^2 = ac - b^2$，而由于这个值不为零，$k = 1$。（事实上 $y = 1$ 满足两条方程，因为这时两条方程都变成 $a + b + c = 0$。）

所以要么 $k=1$，要么两条方程完全相同，全题至此完成。

留意在方程相同的情况下，$a=b=c$ 会得出 $ac=b^2$，而这已被题目的假设排除。所以在题设条件下，公共根其实必定是 $k=1$；“相同”这个可能性，是把条件 $ac\neq b^2$ 拿走之后才会出现的，这时公共根是复数的单位立方根（cube roots of unity）。

验算

取 $a=1$、$b=2$、$c=-3$，则 $a+b+c=0$。两条方程是 $y^2+2y-3=(y-1)(y+3)=0$ 和 $2y^2-3y+1=(2y-1)(y-1)=0$，它们共用 $k=1$。这里 $ac-b^2=-7$、$bc-a^2=-7$ 及 $ab-c^2=-7$，所以 $(ac-b^2)k=bc-a^2$、$(ac-b^2)k^2=ab-c^2$ 和 $(-7)(-7)=(-7)^2$ 全部成立，而且 $a^3-3abc+b^3+c^3=1+18+8-27=0$。我们亦以精确算术，用一千组随机的三元数组检验过第一部分的两个恒等式，以及展开式 $(ac-b^2)(ab-c^2)-(bc-a^2)^2=-a(a^3-3abc+b^3+c^3)$。

常见错误

- 消去常数项（$a\times(1)-c\times(2)$）会得出 $k\big((a^2-bc)k+ab-c^2\big)=0$，还需要 $k\neq 0$ 才用得上。$c\times(1)-b\times(2)$ 这个组合则可避免这个问题。
- 除以 $ac-b^2$ 时，没有说明题目已保证它不为零。
- 由 $\mathrm{Q}(a)=0$ 推出 $a=b=c$ 时，没有用到 a、b、c 是实数：平方和的论证对复数并不成立。

STEP 之外

两个多项式有公共根的条件，一般由结式（resultant）给出，那是一个由它们的系数构成的行列式（determinant）；关系式 $(ac-b^2)(ab-c^2)=(bc-a^2)^2$ 正正就是令这两个二次式的结式等于零。$a^3+b^3+c^3-3abc$ 这个式子也是一个循环矩阵（circulant matrix）的行列式，而且它可以完全分解为 $(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$，其中 ω 是一个复数的单位立方根。想进一步了解多项式及其根，可参阅 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。