详细解答

STEP I 2007，第 3 题

纯数学 · 三角函数积分

> **STEP I 2007，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q3

关键思路

$\cos^4\theta$ 和 $\sin^4\theta$ 单独来看都不易积分，但只要利用 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 把两者的差与和化为 2θ 的函数，这两个式子就都容易积分（integrate）了。把和与差分别积分，便得到关于所求两个积分的两条简单线性方程。同样的技巧再升一级，就能处理六次方的情况。

解答

恒等式

把平方差（difference of two squares）因式分解，

$$\cos^4\theta-\sin^4\theta=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\cos 2\theta\cdot 1=\cos 2\theta.$$

至于两者之和，我们用配方法（completing the square）：

$$\begin{aligned}\cos^4\theta+\sin^4\theta&=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta\\&=1-\tfrac{1}{2}(2\sin\theta\cos\theta)^2\\&=1-\tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta,\end{aligned}$$

其中用到 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$。两个恒等式（identity）均已得证。

四次方

记 $C_4=\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta$ 及 $S_4=\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta$。把第一个恒等式积分，

$$C_4-S_4=\int_0^{\pi/2}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta=\left[\tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2}=0.$$

对于第二个恒等式，我们需要 $\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta \,\mathrm{d}\theta$。利用 $\sin^2 2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 4\theta)$，

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta \,\mathrm{d}\theta = \left[\tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{8}\sin 4\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4},$$

因为 $\sin 2\pi = 0$。因此

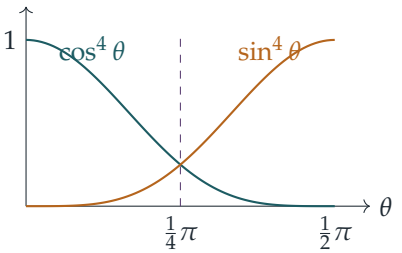
$$C_4 + S_4 = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta\right) \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8}.$$

把两条方程相加和相减，

$$\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta \,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^4\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{16}.$$

想一想 我们能否不经任何计算就看出 $C_4 = S_4$?

可以。代换（substitution）$\phi = \frac{1}{2}\pi - \theta$ 把 $\cos\theta$ 变成 $\sin\phi$，并把上下限 0 和 $\frac{1}{2}\pi$ 对调，所以对任何 n 都有 $\int_0^{\pi/2} \cos^n\theta \,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^n\phi \,\mathrm{d}\phi$。$\cos^4\theta$ 与 $\sin^4\theta$ 的图像关于直线 $\theta = \frac{1}{4}\pi$ 互为镜像，因此两者所围的面积相等：



所以第一个恒等式其实只是为了求和才用得上；差的积分等于 0，不过是这种对称性（symmetry）的另一种面貌。

六次方

我们重复同一方法。设 $c = \cos\theta$、$s = \sin\theta$，并有 $c^2 + s^2 = 1$：

$$\begin{aligned} c^6 - s^6 &= (c^2 - s^2)(c^4 + c^2 s^2 + s^4) = \cos 2\theta\left(1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta + \tfrac{1}{4}\sin^2 2\theta\right) \\ &= \cos 2\theta\left(1 - \tfrac{1}{4}\sin^2 2\theta\right), \end{aligned}$$

其中用到已证明的恒等式以及 $c^2 s^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta$。至于两者之和，我们利用 $c^2 + s^2$ 的立方：

$$c^6 + s^6 = (c^2 + s^2)^3 - 3c^2 s^2 (c^2 + s^2) = 1 - \tfrac{3}{4}\sin^2 2\theta.$$

以 C_6 和 S_6 表示这两个积分。由于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin^3 2\theta = 6\sin^2 2\theta\cos 2\theta$，

$$C_6 - S_6 = \left[\tfrac{1}{2}\sin 2\theta - \tfrac{1}{24}\sin^3 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 0,$$

这与对称性论证所预料的结果一致。再次利用 $\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\pi$，

$$C_6 + S_6 = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{16}.$$

因此

$$\int_0^{\pi/2} \cos^6\theta \,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^6\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{5\pi}{32}.$$

验算

- 幂次愈高，答案愈小：$n=0$ 时为 $\frac{1}{2}\pi$，$n=2$ 时为 $\frac{1}{4}\pi$，然后是 $\frac{3}{16}\pi$ 和 $\frac{5}{32}\pi$。这是必然的，因为在该区间上 $0 \le \cos\theta \le 1$。
- 数值上，用辛普森法则（Simpson's rule）可得 $\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta \approx 0.589049$ 及 $\int_0^{\pi/2}\cos^6\theta\,\mathrm{d}\theta \approx 0.490874$，与 $3\pi/16$ 和 $5\pi/32$ 吻合；正弦的积分在同样的准确度下亦与这些数值一致。
- 把 $\theta = \frac{1}{4}\pi$ 代入两个关于和的恒等式，得 $\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1-\frac{1}{2}$ 及 $\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = 1-\frac{3}{4}$，两者皆成立。

常见错误

- 仿照 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ 而写出 $\cos^4\theta + \sin^4\theta = 1$：这样就漏掉了交叉项 $2\sin^2\theta\cos^2\theta$。
- 对 $\cos 2\theta$ 或 $\cos 4\theta$ 积分时，忘记由链式法则（chain rule）而来的因子 $\frac{1}{2}$；在本题中，这对 $\cos 2\theta$ 没有影响（反正积分是 0），但对 $\sin^2 2\theta$ 就有影响。

STEP 之外

这些都是沃利斯（Wallis）积分 $I_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\,\mathrm{d}\theta$ 的特例，它们满足递推公式（reduction formula）$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$（用分部积分法（integration by parts）即可得到）。你可以验证 $I_4 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$ 和 $I_6 = \frac{5}{6}I_4$ 正好给出上面的答案。比较 I_{2n} 与 I_{2n+1}，便可推导出沃利斯著名的 π 的无穷乘积（infinite product）。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 有更多 STEP 风格的递推公式练习，而 Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis* 则把当中的极限论证严格化。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。