详细解答

STEP I 2007，第 2 题

纯数学 · 反正切恒等式

STEP I 2007，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/07-s1-q2

关键思路

只要对等式两边取正切，再运用 $\tan(A+B)$ 的加法公式（addition formula），一条关于反正切（inverse tangent）的等式就会变成一条关于普通分数的等式。代价是 tan 每隔 π 便重复一次，所以 $\tan(A+B)=1$ 只告诉我们 $A+B=\frac{1}{4}\pi+k\pi$；我们还需要交代一下各个角的大小，才能确定 k。在此之后，每一部分都是一小段数论（number theory）：作因式分解（factorise），或者运用整除性（divisibility）论证。

解答

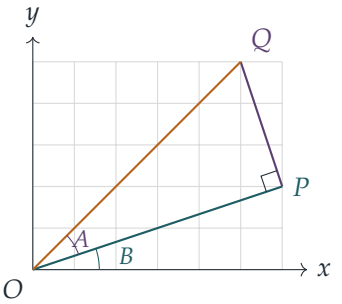
第 (i) 部分

由于 $\tan A=\frac{1}{2}$ 及 $\tan B=\frac{1}{3}$，

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1.$$

现在 A 和 B 都是锐角（acute），所以 $0<A+B<\pi$，而在 $(0,\pi)$ 内正切为 1 的角只有 $\frac{1}{4}\pi$。因此 $A+B=\frac{1}{4}\pi$，正如所求。

下图在方格纸上展示同一事实。取 $O=(0,0)$、$P=(6,2)$ 及 $Q=(5,5)$，直线 OP 与 x 轴的夹角为 $\arctan\frac{1}{3}$；$PQ=(-1,3)$ 垂直于 $OP=(6,2)$，而且长度是它的一半，所以角 POQ 是 $\arctan\frac{1}{2}$；而 Q 位于直线 $y=x$ 上，即在 $\frac{1}{4}\pi$ 的方向。



第 (i) 部分：整数 p 和 q

首先排除 $pq = 1$ 的情况,因为这时加法公式会出现除以零。此时 $p = q = 1$ 或 $p = q = -1$，左边分别是 $\frac{1}{2}\pi$ 和 $-\frac{1}{2}\pi$，两者都不是 $\frac{1}{4}\pi$。所以 $pq \neq 1$，对题目所给等式的两边取正切，得

$$\frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}{1 - \frac{1}{pq}} = 1.$$

分子和分母同乘以 pq，得 $\dfrac{p+q}{pq-1} = 1$，所以

$$p + q = pq - 1 \quad \Longrightarrow \quad pq - p - q + 1 = 2 \quad \Longrightarrow \quad (p-1)(q-1) = 2,$$

这就是所要求的结果。

由于 $p-1$ 和 $q-1$ 是乘积为 2 的整数，数对 $(p-1, q-1)$ 必为以下其中之一：

$$(1,2), \quad (2,1), \quad (-1,-2), \quad (-2,-1),$$

由此得 $(p,q) = (2,3)$、$(3,2)$、$(0,-1)$ 或 $(-1,0)$。最后两个要舍去，因为 p 和 q 都不是零。所以 $\{p,q\} = \{2,3\}$，而根据第 (i) 部分的前半，两种次序确实都满足该等式。

? **想一想** 我们只证明了解必须满足 $(p-1)(q-1) = 2$。为甚么事后还要检查这些候选答案?

取正切会失去信息：$(p-1)(q-1) = 2$ 等价于 $\tan(\arctan\frac{1}{p} + \arctan\frac{1}{q}) = 1$，而后者也容许和为 $-\frac{3}{4}\pi$ 之类的值。这里的候选数对要么含有 0（于是 $\frac{1}{p}$ 没有意义），要么是 2 和 3，而我们已知这一对是成立的。

第 (ii) 部分

设 $\theta = \arctan\frac{1}{r}$ 及 $\phi = \arctan\dfrac{s}{s+t}$。对题目所给的等式取正切，

$$\frac{\frac{1}{r} + \frac{s}{s+t}}{1 - \frac{s}{r(s+t)}} = 1.$$

分母不为零：由于 $r \geq 1$ 及 $t \geq 1$，我们有 $r(s+t) > s$。分子和分母同乘以 $r(s+t)$，

$$\frac{(s+t)+rs}{r(s+t)-s} = 1 \quad \Longrightarrow \quad s+t+rs = rs+rt-s \quad \Longrightarrow \quad t(r-1) = 2s.$$

想一想 关于 s 和 t 的最大公因数（highest common factor）的条件，在哪里派上用场?

等式 $t(r-1) = 2s$ 表示 t 整除 $2s$。由于 $\text{hcf}(s,t) = 1$，t 与 s 没有公共的质因数（prime factor），所以 t 的每个质因数都必须来自那个 2：即 t 整除 2。由于 t 是正整数，可能的值只有

$$t = 1 \quad \text{或} \quad t = 2.$$

- 若 $t = 1$：$r - 1 = 2s$，所以 $r = 2s + 1$。
- 若 $t = 2$：$2(r-1) = 2s$，所以 $r = s + 1$。（这里 s 必须是奇数，因为 $\text{hcf}(s,2) = 1$。）

两种情况都确实会出现。事实上 $0 < \frac{1}{r} \leq 1$ 及 $0 < \frac{s}{s+t} < 1$，所以 θ 和 ϕ 都落在 $(0, \frac{1}{4}\pi]$ 内，并且 $0 < \theta + \phi < \frac{1}{2}\pi$。把上面的代数运算倒推回去，$t(r-1) = 2s$ 给出 $\tan(\theta+\phi) = 1$，于是 $\theta + \phi = \frac{1}{4}\pi$ 准确成立。例如，$t = 1$, $s = 1$ 给出 $\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{2}$，而 $t = 2$, $s = 1$ 给出 $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$：正是第 (i) 部分的恒等式，两种次序各出现一次。

验算

- 用计算机计算，$\arctan 0.5 + \arctan(1/3) = 0.4636 + 0.3218 = 0.7854 = \frac{1}{4}\pi$。
- 用电脑搜索所有满足 $|p|, |q| \leq 200$ 的非零 p, q，只找到 $(2,3)$ 和 $(3,2)$。
- 在 $r < 400$ 及 $s, t < 150$ 且 $\text{hcf}(s,t) = 1$ 的范围内搜索，只找到 $t = 1$, $r = 2s+1$ 和 $t = 2$, $r = s+1$；例如 $\arctan\frac{1}{8} + \arctan\frac{7}{9} = \frac{1}{4}\pi$（$s = 7$, $t = 2$），在机器精度内成立。

常见错误

- 由 $\tan(A+B) = 1$ 直接推断 $A + B = \frac{1}{4}\pi$，却没有说明为何 $A + B$ 不可能是 $\frac{5}{4}\pi$。
- 忘记了 2 的负因数分解 $(-1)(-2)$ 和 $(-2)(-1)$，或者忘记因为它们会给出零而要把它们舍去。
- 写“t 整除 $2s$，所以 t 整除 2”而没有引用 $\text{hcf}(s,t) = 1$：这正是需要用到该假设的地方。

STEP 之外

tan 的加法公式其实就是复数（complex numbers）的乘法：$\arctan \frac{1}{p}$ 是 $p + \mathrm{i}$ 的辐角（argument），所以第 (i) 部分所说的，就是 $(2 + \mathrm{i})(3 + \mathrm{i}) = 5 + 5\mathrm{i}$ 的辐角为 $\frac{1}{4}\pi$。像梅钦（Machin）公式 $4\arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{1}{4}\pi$ 这类恒等式，曾被用来把 π 计算到数百位，它们正是以完全相同的方式，由高斯整数（Gaussian integers）的因数分解得来。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 把复数乘法的几何阐述得十分精彩，而 Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 则涵盖了第 (ii) 部分所用的整除性论证。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。