详细解答

STEP I 2007，第 14 题

概率与统计 · 泊松参数的唯一性

STEP I 2007，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/07-s1-q14

关键思路

每一项资料都给出一条形如 $h(\lambda) = $ 常数 的方程，其中 h 是平均值（mean）的某个函数。这条方程能否唯一地确定 λ，完全取决于 h 在 $\lambda > 0$ 上的形状：严格单调（strictly monotonic）的 h 取每个值最多一次，而先升后降的 h 则会取大部分的值两次，只有最大值才取一次。因此，整道题的重点就是找出每个函数在哪里单调、在哪里达到顶点。

解答

全题中，$\lambda > 0$（泊松分布（Poisson distribution）的平均值必为正数），而且 $\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k/k!$，其中 $k = 0, 1, 2, \ldots$

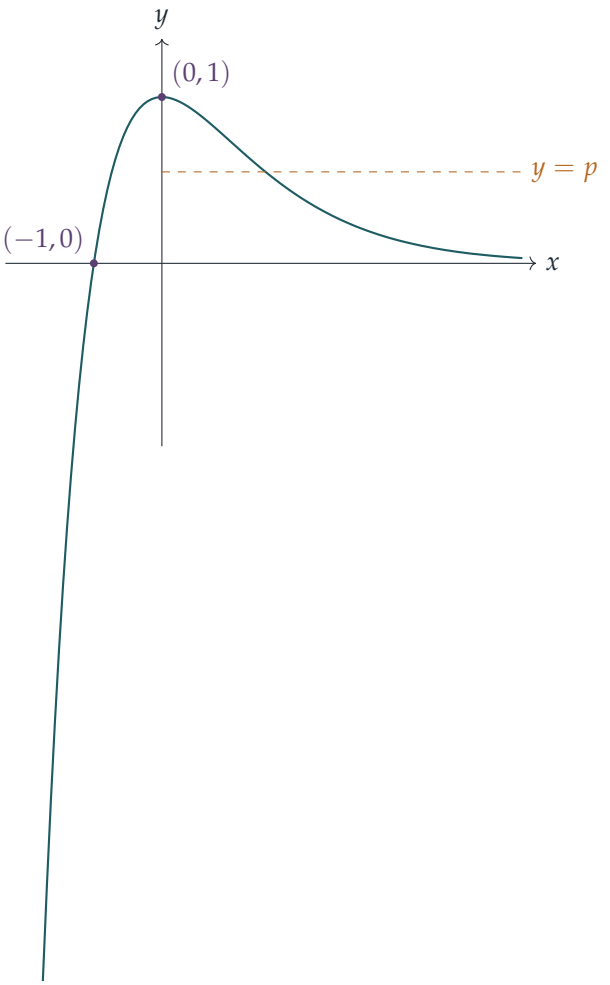
第 (i) 部分

设 $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$。由乘积法则（product rule），

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+1)\mathrm{e}^{-x} = -x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

由于 $\mathrm{e}^{-x} > 0$，$f'(x)$ 的正负号与 x 相反：f 在 $x < 0$ 时递增，在 $x > 0$ 时递减。所以唯一的转向点（turning point）是位于 $(0, 1)$ 的极大点，这也正是曲线与 y 轴相交之处。曲线与 x 轴相交于 $x + 1 = 0$ 之处，即 $(-1, 0)$。

至于两端的情况：当 $x \to \infty$ 时，e^{-x} 压倒线性因子，$f(x) \to 0$，并且是从上方趋近（x 轴是一条渐近线（asymptote））；当 $x \to -\infty$ 时，两个因子的大小都不断增长，$f(x) \to -\infty$。



现在考虑概率。我们有

$$\mathrm{P}(X \geq 2) = 1 - \mathrm{P}(X = 0) - \mathrm{P}(X = 1) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} - \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} = 1 - f(\lambda),$$

所以题目所给的资料恰好等于说

$$f(\lambda) = (1 + \lambda)\mathrm{e}^{-\lambda} = p.$$

在 $\lambda > 0$ 上，函数 f 连续（continuous）而且严格递减（因为 $f'(\lambda) = -\lambda \mathrm{e}^{-\lambda} < 0$），由 $f(0) = 1$ 开始下降，当 $\lambda \to \infty$ 时趋向 0。所以它取 $(0, 1)$ 内的每个值恰好一次：由中间值定理（intermediate value theorem）可知最少有一个解，而严格单调性则排除了第二个解。在略图中，当 $0 < p < 1$ 时，水平线 $y = p$ 与右边的分支恰好相交一次。因此 λ 被唯一确定。

第 (ii) 部分

这里 $\mathrm{P}(X=1)=\lambda \mathrm{e}^{-\lambda}=q$。记 $g(\lambda)=\lambda \mathrm{e}^{-\lambda}$，则

$$g'(\lambda)=(1-\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda},$$

所以 g 在 $(0,1]$ 上严格递增，在 $[1,\infty)$ 上严格递减，最大值为 $g(1)=\mathrm{e}^{-1}$。此外，当 $\lambda\to 0^{+}$ 及当 $\lambda\to\infty$ 时，都有 $g(\lambda)\to 0$。（事实上 $g(\lambda)=\mathrm{e}^{-1}f(\lambda-1)$，所以 g 的图像就是第 (i) 部分的曲线向右平移一个单位，再沿垂直方向按 e^{-1} 的比例缩放。）

> ? **想一想** 一条水平线与一条先升至顶点、然后下降的曲线，可以相交多少次?

每一段单调的部分最多被击中一次，所以:

- 若 $0<q<\mathrm{e}^{-1}$，则在 $(0,1)$ 内有一个解，在 $(1,\infty)$ 内有另一个解，所以 λ 有两个可能的值;
- 若 $q>\mathrm{e}^{-1}$，则没有解;
- 若 $q=\mathrm{e}^{-1}$，则唯一的解就是顶点本身，即 $\lambda=1$。

所以这项资料只对恰好一个 q 值确定唯一的 λ，即

$$q=\mathrm{e}^{-1},\qquad \lambda=1.$$

第 (iii) 部分

根据条件概率（conditional probability）的定义，并且由于事件 $\{X=1\}$ 包含于 $\{X\le 2\}$ 之内，

$$\mathrm{P}(X=1\mid X\le 2)=\frac{\mathrm{P}(X=1)}{\mathrm{P}(X\le 2)}=\frac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda}}{\mathrm{e}^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{1}{2}\lambda^{2}\right)}=\frac{2\lambda}{2+2\lambda+\lambda^{2}}.$$

把它记作 $k(\lambda)$。将分子和分母同时除以 λ（由于 $\lambda>0$，这是容许的），

$$k(\lambda)=\frac{2}{\lambda+\dfrac{2}{\lambda}+2}.$$

> ? **想一想** 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda+2/\lambda$ 的最小值是多少?

由算术平均—几何平均不等式（AM–GM inequality），$\lambda+\dfrac{2}{\lambda}\ge 2\sqrt{\lambda\cdot\dfrac{2}{\lambda}}=2\sqrt{2}$，等号成立当且仅当 $\lambda=2/\lambda$，即 $\lambda=\sqrt{2}$。再者，$\lambda+2/\lambda$ 在 $(0,\sqrt{2}]$ 上严格递减，在 $[\sqrt{2},\infty)$ 上严格递增（它的导数 $1-2/\lambda^{2}$ 只在 $\sqrt{2}$ 处变号），而且在两端都趋向 ∞。所以 k 与第

(ii) 部分的 g 一样，具有先升后降的形状，其最大值为

$$k(\sqrt{2}) = \frac{2}{2\sqrt{2}+2} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1.$$

与之前完全一样：当 $0 < r < \sqrt{2}-1$ 时，λ 有两个值；当 $r > \sqrt{2}-1$ 时，没有任何值；当 $r = \sqrt{2}-1$ 时，恰好有一个值。所以 λ 只在以下情况被唯一确定：

$$r = \sqrt{2}-1, \qquad \lambda = \sqrt{2}.$$

另一方法：在 $k(\lambda) = r$ 中消去分母，得到二次方程 $r\lambda^2 - 2(1-r)\lambda + 2r = 0$。它的两根之积为 $2 > 0$，两根之和为 $2(1-r)/r > 0$，所以若有实根，两根必定都是正数；方程恰好有一个根，当且仅当判别式（discriminant）$4\left[(1-r)^2 - 2r^2\right] = 4(1-2r-r^2)$ 等于零，由此得 $r = \sqrt{2}-1$（取正根），以及重根 $\lambda = (1-r)/r = \sqrt{2}$。

验算

- 第 (ii) 部分：$\lambda = 1$ 给出 $\mathrm{P}(X=1) = \mathrm{e}^{-1} \approx 0.3679$；以数值方法在 $0 < \lambda < 40$ 的范围内扫描 $\lambda \mathrm{e}^{-\lambda}$，其值从不超过这个数，而 $q = 0.3$ 则给出两个交点。
- 第 (iii) 部分：取 $\lambda = \sqrt{2}$，则 $\dfrac{2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}+2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1 \approx 0.4142$，数值扫描亦确认这就是最大值；$r = 0.35$ 给出 λ 的两个值，$r = 0.45$ 则没有任何值。
- 合理性检查：当 $\lambda \to 0$ 时，几乎全部概率质量都集中在 0；当 $\lambda \to \infty$ 时，在已知 $X \le 2$ 的条件下，概率质量堆积在 2。所以在这两个极限情况下都有 $\mathrm{P}(X=1 \mid X \le 2) \to 0$，与公式所示一致。

常见错误

- 忘记 $\lambda > 0$：在第 (i) 部分，曲线在 $x < 0$ 时同样存在，但只有 $x > 0$ 的分支才与概率有关。
- 在第 (i) 部分声称解是唯一的，却没有说明原因：你既要说明解存在（连续性，以及函数值由 1 一直下降至 0），也要说明没有第二个解（严格单调性）。
- 在第 (iii) 部分使用 $\mathrm{P}(X=1 \text{ 及 } X \le 2) = \mathrm{P}(X=1)\,\mathrm{P}(X \le 2)$；这两个事件并非独立（independent），而是 $\{X=1\}$ 包含于 $\{X \le 2\}$ 之内。

STEP 之外

这是初尝*可识别性*（identifiability）的滋味：在统计学中，我们会问一个观察得到的量能否确定模型的参数，而答案是肯定的，当且仅当由参数到可观察量的映射是一对一（one-

to-one）的。在这里，$\mathrm{P}(X \geq 2)$ 能识别 λ，但 $\mathrm{P}(X = 1)$ 和 $\mathrm{P}(X = 1 \mid X \leq 2)$ 一般都不能。当你要求似然（likelihood）的最大值时，同样的先升后降形状会再次出现：$\lambda \mathrm{e}^{-\lambda}$ 就是在看到单一观察值 $X = 1$ 之后 λ 的似然，而它在 $\lambda = 1$ 处的顶点就是最大似然估计（maximum likelihood estimate）。Blitzstein 与 Hwang 合著的 *Introduction to Probability*（概率论入门）写得生动活泼，是进一步了解泊松分布和条件概率的好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。