详细解答

STEP I 2007，第 11 题

力学 • 抛体运动

STEP I 2007，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

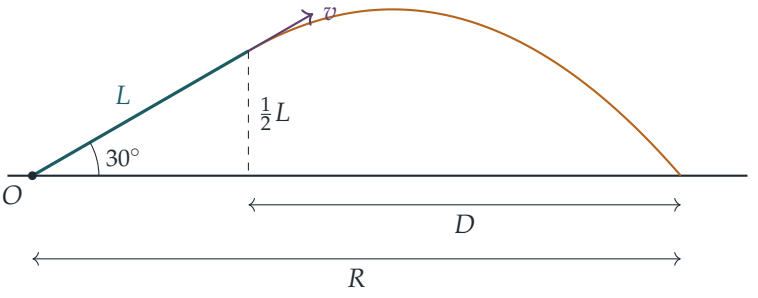
step.maths.org/questions/07-s1-q11

关键思路

把运动分成两个阶段。在光滑（smooth）管内，沿管方向唯一的力就是重力的分量，所以用能量（energy）（或等加速度公式（constant-acceleration formulae））便可求出离管时的速率。之后它就是一个普通的抛体（projectile），从高于终点水平 $\frac{1}{2}L$ 的一点以 30° 射出。消去飞行时间便得到关于 D 的二次方程；对它作隐函数微分，就可求得 $\mathrm{d}D/\mathrm{d}L$，完全不必解出 D。

解答

我们把粒子（particle）看成质点（point mass），把管看成光滑的（因此法向反作用力（normal reaction）不作功，沿管方向亦没有分量），并忽略空气阻力（air resistance）。



在管内

沿管方向分解力，唯一的分量是沿斜面向下的 $mg\sin 30^\circ = \frac{1}{2}mg$，所以减速度（deceleration）为 $\frac{1}{2}g$。经过距离 L 后，

$$v^2 = u^2 - 2\cdot\tfrac{1}{2}g\cdot L = u^2 - gL,$$

其中 v 是离管时的速率。（粒子要能离开管，必须有 $u^2 > gL$。）管的顶端比下端高 $L\sin 30^\circ = \frac{1}{2}L$，与下端的水平距离为 $L\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}L$。

抛体阶段

粒子沿管的方向离开，所以它的速度的水平分量为 $\frac{\sqrt{3}}{2}v$，垂直分量为向上的 $\frac{1}{2}v$。以离管点为原点量度，经过时间 t 后

$$x = \tfrac{\sqrt{3}}{2}vt, \qquad y = \tfrac{1}{2}vt - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

当 $y = -\frac{1}{2}L$ 时，粒子回到下端的水平，此刻 $x = D$。由第一式得 $t = \dfrac{2D}{\sqrt{3}\,v}$，代入第二式，

$$\frac{D}{\sqrt{3}} - \frac{2gD^2}{3v^2} = -\frac{L}{2}.$$

全式乘以 $-6v^2$，

$$4gD^2 - 2\sqrt{3}\,v^2D - 3Lv^2 = 0,$$

再代入 $v^2 = u^2 - gL$，

$$4gD^2 - 2\sqrt{3}\,(u^2 - gL)D - 3L(u^2 - gL) = 0,$$

这就是所求的方程。（它的两个根之中，D 是正的那一个：两根之积为 $-3Lv^2/(4g) < 0$。）

导数

当 u 固定时，D 取决于 L，所以我们把方程对 L 求导，凡同时含有两者的项都用积法则（product rule）：

$$8gD\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L} - 2\sqrt{3}(u^2 - gL)\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L} + 2\sqrt{3}\,gD - 3(u^2 - gL) + 3gL = 0.$$

最后两项合并为 $-3(u^2 - 2gL)$。把含 $\mathrm{d}D/\mathrm{d}L$ 的项集中起来，

$$\left(8gD - 2\sqrt{3}(u^2 - gL)\right)\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L} = -\left(2\sqrt{3}\,gD - 3(u^2 - 2gL)\right),$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L} = -\frac{2\sqrt{3}\,gD - 3(u^2 - 2gL)}{8gD - 2\sqrt{3}(u^2 - gL)},$$

正如所求。

想一想 为甚么 $-3L(u^2-gL)$ 这一项会产生两部分?

因为 L 在其中出现了两次: 把 $-3Lu^2+3gL^2$ 求导得 $-3u^2+6gL$, 即 $-3(u^2-gL)+3gL$。忘记括号内的 L，是漏掉答案中 $2gL$ 的最常见原因。

R 的驻值（stationary value）

粒子最终相对于下端的水平位移，等于管的水平跨度加上 D:

$$R=\tfrac{\sqrt3}{2}L+D,\qquad \text{所以}\qquad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}L}=\frac{\sqrt3}{2}+\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L}.$$

因此 $\mathrm{d}R/\mathrm{d}L=0$ 当且仅当 $\mathrm{d}D/\mathrm{d}L=-\frac{\sqrt3}{2}$，即（两边乘以分母，下文会验证分母不为零）

$$2\sqrt3\,gD-3(u^2-2gL)=\tfrac{\sqrt3}{2}\big(8gD-2\sqrt3(u^2-gL)\big)=4\sqrt3\,gD-3(u^2-gL).$$

两边的 $3u^2$ 项互相抵消，余下 $6gL-2\sqrt3\,gD=3gL$，所以 $2\sqrt3\,gD=3gL$，即

$$2D=L\sqrt3.$$

每一步都是可逆的，所以当 $2D=L\sqrt3$ 时 $\mathrm{d}R/\mathrm{d}L=0$，正如所求。

要求出 R，把 $D=\frac{\sqrt3}{2}L$ 代入二次方程:

$$4g\cdot\tfrac34L^2-2\sqrt3(u^2-gL)\cdot\tfrac{\sqrt3}{2}L-3L(u^2-gL)=3gL^2-6L(u^2-gL)=0.$$

由于 $L>0$，由此得 $gL=2(u^2-gL)$，所以 $L=\dfrac{2u^2}{3g}$。（这时 $v^2=u^2-gL=\frac13u^2>0$，所以粒子确实会离开管，而分母 $8gD-2\sqrt3v^2=\frac{8\sqrt3}{3}u^2-\frac{2\sqrt3}{3}u^2=2\sqrt3\,u^2$ 不为零。）最后

$$R=\tfrac{\sqrt3}{2}L+D=\sqrt3\,L=\frac{2\sqrt3\,u^2}{3g}=\frac{2u^2}{\sqrt3\,g}.$$

验算

- 当 $L=0$ 时，二次方程给出 $D=\sqrt3u^2/(2g)$，正是以 30° 发射时大家熟悉的射程（range）$u^2\sin60^\circ/g$。
- 当 $L=u^2/g$ 时，粒子刚好到达顶端而 $v=0$，所以 $D=0$，同样有 $R=\frac{\sqrt3}{2}u^2/g$。驻值 $2u^2/(\sqrt3g)\approx1.155\,u^2/g$ 出现在这两个情况之间，而且比两者都大，所以它是极大值。
- 数值上，取 $u=g=1$，让 L 扫过 $[0,1]$，所得的最大 R 为 1.1547，出现于 $L\approx0.6667$，与 $2/\sqrt3$ 及 $L=\frac23$ 吻合；直接逐步模拟运动，亦能重现关于 D 的二次方程。

常见错误

- 把管内的减速度当作 g，而不是 $g\sin 30^\circ = \frac{1}{2}g$。
- 令 $y = 0$ 而不是 $y = -\frac{1}{2}L$：粒子的落点低于它的发射点。
- 写成 $R = D$，忘记了管本身的水平长度 $\frac{\sqrt{3}}{2}L$。

STEP 之外

不解方程 $F(D, L) = 0$ 而直接对它求导，就是隐函数微分法（implicit differentiation）；到了大学一年级的分析课，它会发展成隐函数定理（implicit function theorem）：$\mathrm{d}D/\mathrm{d}L = -F_L/F_D$，凡 $F_D \neq 0$ 之处皆成立，而这正是我们验证过的那个分母。力学方面，Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）是很好的下一步。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。