详细解答

STEP I 2007，第 10 题

力学 · 位移–时间图

> **STEP I 2007，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q10

关键思路

在位移—时间图（displacement–time graph）上，每名骑兵和每支军队都是一条直线（或两段直线），而“彼此相遇”不过是两条线相交。因此我们以撒克逊军队为起点量度位移，写出每条线的方程，再求它们的交点。题目中的不等式，正正就是各个交点按我们预期的次序出现的条件；而最后一部分所问的，是其中一个条件不成立时会发生甚么事。

解答

建立图像

我们把军队和骑兵看成沿一条直线运动的点。设 s 为由（静止的）撒克逊军队起计、朝诺曼军队方向的位移，并在两军相距 d 时开始计时。于是：

- 撒克逊军队：$s = 0$。
- 诺曼军队：$s = d - ut$。
- 撒克逊骑兵，去程：$s = xt$。他到达诺曼军队时 $xt = d - ut$，即在 $t_S = \dfrac{d}{x+u}$，位置为 $s = \dfrac{xd}{x+u}$。他以速率 x 折返，

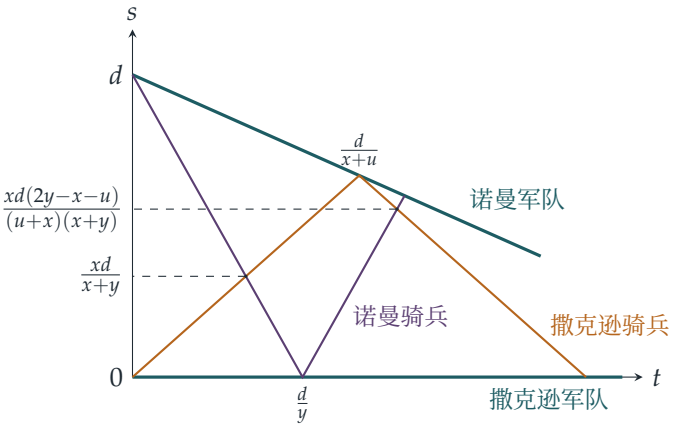
  $$s = \frac{xd}{x+u} - x\left(t - \frac{d}{x+u}\right) = \frac{2xd}{x+u} - xt,$$

  并在 $t = \dfrac{2d}{x+u}$ 回到本阵。
- 诺曼骑兵，去程：$s = d - yt$。他在 $t_N = \dfrac{d}{y}$ 到达撒克逊军队，然后以速率 y 折返，其

直线为

$$s = y\left(t - \frac{d}{y}\right) = yt - d.$$

由于 $y > u$，他确实能追上自己的军队，此时 $yt - d = d - ut$，即在 $t = \dfrac{2d}{y+u}$。



（图中取 $u = 1$、$x = 2$、$y = 4$、$d = 1$。）

第一次相遇

两名骑兵都在去程，所以我们求 $s = xt$ 与 $s = d - yt$ 的交点：$(x+y)t = d$，得

$$t = \frac{d}{x+y}, \qquad s = \frac{xd}{x+y}.$$

这确实发生在两人掉头之前，因为 $\frac{d}{x+y}$ 比 $\frac{d}{y}$ 和 $\frac{d}{x+u}$ 都小（后者用到 $y > u$）。

第二次相遇

现在两名骑兵都在回程：我们求 $s = \dfrac{2xd}{x+u} - xt$ 与 $s = yt - d$ 的交点。两边同时加上 $xt + d$，

$$(x+y)t = d + \frac{2xd}{x+u} = \frac{d(3x+u)}{x+u}, \qquad \text{所以} \qquad t_2 = \frac{d(3x+u)}{(x+u)(x+y)}.$$

于是

$$s = \frac{2xd}{x+u} - \frac{xd(3x+u)}{(x+u)(x+y)} = \frac{xd\big(2(x+y) - (3x+u)\big)}{(x+u)(x+y)} = \frac{xd(2y-x-u)}{(u+x)(x+y)},$$

这就是题目要求的第二个距离。

想一想 我们怎样知道在时刻 t_2 两名骑兵真的都在回程?

这正是那些不等式派上用场的地方。诺曼骑兵已经掉头，若 $t_2 \geq \frac{d}{y}$:

$$y(3x+u) \geq (x+u)(x+y) \iff 3xy \geq x^2+xy+ux \iff u \leq 2y-x.$$

撒克逊骑兵已经掉头，若 $t_2 \geq \frac{d}{x+u}$:

$$3x+u \geq x+y \iff u \geq y-2x.$$

所以条件 $y-2x < u < 2y-x$ 恰好保证 t_2 在两个掉头时刻之后。同一个条件 $u < 2y-x$ 亦使 $s > 0$, 即撒克逊骑兵尚未回到本阵。(还有一个题目没有明言的要求：诺曼骑兵不可先回到自己的军队。把 $t_2 \leq \frac{2d}{y+u}$ 化简, 可得 $(x-u)(2x-y+u) \geq 0$; 由于 $2x-y+u > 0$, 这表示 $x \geq u$，即撒克逊骑兵至少与诺曼军队一样快。这肯定是题目的原意：否则他一掉头，诺曼军队便会越过他。)

情况 (i)： $u > 2y-x$

此时 $t_2 < \frac{d}{y}$：撒克逊骑兵回程的直线与诺曼骑兵去程的直线先相交。由于 $y > u$，这个情况需要 $x > y$：撒克逊骑兵是较快的一方。他到达诺曼军队后掉头，在两人都朝撒克逊军队前进时从后追上诺曼骑兵。(求 $s = \frac{2xd}{x+u} - xt$ 与 $s = d - yt$ 的交点，可知这发生在距撒克逊军队 $\frac{xd(x+u-2y)}{(x+u)(x-y)}$ 处。) 他在 $\frac{2d}{x+u}$ 回到本阵，早于诺曼骑兵到达的时刻 $\frac{d}{y}$，所以两人不会第二次迎面相遇：诺曼骑兵只是到达撒克逊军队，而他的对手早已回来了。

情况 (ii)： $u < y-2x$

此时 $t_2 < \frac{d}{x+u}$：诺曼骑兵快得多。他到达撒克逊军队后掉头，越过仍在朝诺曼军队前进的撒克逊骑兵。求 $s = yt - d$ 与 $s = xt$ 的交点，可知这发生在 $t = \frac{d}{y-x}$，距撒克逊军队 $\frac{xd}{y-x}$ 处。其后诺曼骑兵在 $\frac{2d}{y+u}$ 回到本阵，早于撒克逊骑兵到达诺曼军队的时刻 $\frac{d}{x+u}$ (因为 $2(x+u) < y+u$)，此后两人在战场上再无相遇。

验算

- 取 $d=1$、$u=1$、$x=2$、$y=4$ (如图所示)，公式给出相遇位置为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{5}{9}$。以 10^{-5} 为时间步长用数值方法逐步模拟这个运动，得到的交点在 0.3333 和 0.5556。
- 若 $y = x+u$，两个距离相等，都是 $\frac{x}{x+y}d$。这是一个很适合用来检验的特殊值。
- 当 $u \to 2y-x$ 时，第二个距离趋向 0：第二次相遇正好发生在撒克逊军队处，这就是与情况 (i) 的分界。

常见错误

- 把骑兵的回程写成 $s = -xt$ 或 $s = yt$，忘记把时间原点移到掉头的一刻。
- 求撒克逊骑兵的掉头位置时，用了诺曼军队在 $t = 0$ 的位置，而不是他到达那一刻的位置。
- 在最后一部分只说“他们不会相遇”。在两个情况中，他们其实都有第二次相遇，只是两人同向而行：一人从后越过另一人。

STEP 之外

这类图像称为*世界线*（world lines），是狭义相对论（special relativity）的基本工具。在那里，运动中的观察者之间来回发送的光信号，正是用这种方法分析的（雷达法），而直线的斜率则记录了相对速度。这里的代数运算，即把 u 加到一个速率上、又从另一个速率中减去，就是伽利略（Galileo）式的相对速度。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对伽利略图景和相对论图景都有论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。