详细解答

STEP I 2007，第 1 题

纯数学 · 数字排列的计数

> **STEP I 2007，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q1

关键思路

不要尝试把平衡数逐一列出。相反，应按两组数字之和的共同值 s 把它们分类。对于每个 s，前面一对数字和后面一对数字可以独立地选取，因此数字和为该值的平衡数的数目，就是两个计数的乘积。于是整个问题归结为计算把 s 写成两个数字之和的方法数目，而这等同于计算正方形网格某条对角线上的格点（lattice point）数目。

解答

把一个四位平衡数写成 $abcd$，其中每个数字都属于 $\{0,1,\ldots,k\}$，$a \geq 1$（首位数字不能是 0），并且

$$a+b=c+d=s$$

其中 s 满足 $0 \leq s \leq 2k$。对于每个 s，设

- $N(s)$ 为满足 $c+d=s$ 的数字有序对（ordered pair）(c,d) 的数目；
- $M(s)$ 为满足 $a \geq 1$ 及 $a+b=s$ 的数字有序对 (a,b) 的数目。

一旦固定了 s，任何一个合乎条件的前数对都可以配上任何一个合乎条件的后数对，所以数字和为 s 的平衡数共有 $M(s)N(s)$ 个。不同的 s 值给出不同的数，因此

$$\text{总数} = \sum_{s=0}^{2k} M(s)\,N(s).$$

计算数对的数目

$N(s)$。若 $0 \le s \le k$，则 c 可以是 $0, 1, \ldots, s$ 中的任何一个，而 $d = s - c$ 自动是一个数字。所以 $N(s) = s + 1$。若 $k < s \le 2k$，则 $d = s - c \le k$ 迫使 $c \ge s - k$，所以 c 由 $s - k$ 取到 k，而 $N(s) = 2k + 1 - s$。

$M(s)$。这个计数与上面相同，只是要减去 $a = 0$ 的那一对（如果它存在的话）。那一对是 $(0, s)$，而它只在 $s \le k$ 时才是容许的。所以

$$M(s) = \begin{cases} s, & 0 \le s \le k, \\ 2k + 1 - s, & k < s \le 2k. \end{cases}$$

特别地，$M(0) = 0$：没有平衡数的数字和是 0，这是对的，因为 $a \ge 1$。

> **想一想** 为甚么我们不能只计算所有满足 $a + b = c + d$ 的四位数字串，然后就此作结?

因为像 0312 这样的数字串并不是四位数。条件 $a \ge 1$ 只影响前数对，而且只影响较小的和，这正正就是 $M(s)$ 与 $N(s)$ 只在 $s \le k$ 时才有分别的原因。

第 (i) 部分

这里 $k = 4$，而和的取值由 0 到 8：

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$M(s)$	0	1	2	3	4	4	3	2	1
$N(s)$	1	2	3	4	5	4	3	2	1
$M(s)N(s)$	0	2	6	12	20	16	9	4	1

最底一行加起来是 $(2 + 6 + 12 + 20) + (16 + 9 + 4 + 1) = 40 + 30 = 70$。所以用数字 0 至 4 可以组成七十个四位平衡数，正如题目所求。

第 (ii) 部分

现在利用 M 和 N 的公式，在 $s = k$ 处把和式拆开：

$$\text{总数} = \sum_{s=1}^{k} s(s+1) \; + \; \sum_{s=k+1}^{2k} (2k + 1 - s)^2.$$

（$s=0$ 的一项是零。）在第二个和式中设 $r=2k+1-s$。当 s 由 $k+1$ 取到 $2k$ 时，r 由 k 递减至 1，所以第二个和式就是 $\sum_{r=1}^{k} r^2$。因此

$$\begin{aligned}\text{总数} &= \sum_{r=1}^{k}(r^2+r)+\sum_{r=1}^{k} r^2 = 2\sum_{r=1}^{k} r^2+\sum_{r=1}^{k} r \\ &= \tfrac{1}{3}k(k+1)(2k+1)+\tfrac{1}{2}k(k+1) \\ &= \tfrac{1}{6}k(k+1)\big(2(2k+1)+3\big) \\ &= \tfrac{1}{6}k(k+1)(4k+5),\end{aligned}$$

其中用到题目给出的 $\sum r^2$ 恒等式（$r=0$ 的一项没有贡献）以及 $\sum_{r=1}^{k} r=\frac{1}{2}k(k+1)$。这就是所要求的结果。

验算

- 把 $k=4$ 代入公式，得 $\frac{1}{6}\cdot 4\cdot 5\cdot 21=70$，与第 (i) 部分吻合。
- 当 $k=1$ 时，公式给出 3。直接列举，只用 0 和 1 的四位平衡数是 1001、1010 和 1111。
- 对所有满足 $a\geq 1$ 的数字串 $abcd$ 作穷举（brute-force）计数，结果在 k 由 1 到 15 的每个情况下都与公式相符（例如 $k=9$，即用上全部十进制数字时，结果是 615）。

常见错误

- 忘记首位数字的条件，结果得出的是 $\sum N(s)^2=\frac{1}{3}(k+1)(2k^2+4k+3)$，当 $k=4$ 时这是 85。
- 在 $s>k$ 时算错数对的数目：它是 $2k+1-s$，而不是 $s+1$，因为两个数字都不能超过 k。
- 把中间的和 $s=k$ 在拆开后的两半中都计算了，或者两半都没有计算。

STEP 之外

计数 $N(s)$ 是 $(1+x+\cdots+x^k)^2$ 中 x^s 的系数，而平衡数的总数则是若干个这类多项式之积的某个系数。这种*生成函数*（generating function）方法同样能处理 $2n$ 位的平衡数，而在那种情况下直接计数很快便会变得难以应付。它是大学本科组合数学（combinatorics）的核心工具。想做更多同类的计数问题，可试试 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（进阶数学问题集）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。