详细解答

STEP III 2006，第 9 题

力学 · 能量守恒

STEP III 2006，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

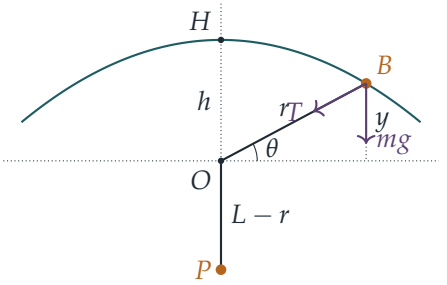
step.maths.org/questions/06-s3-q9

关键思路

绳的长度固定，所以小珠与 O 的距离增加多少，质点 P 就上升多少。这样便把两者的势能（potential energy）连系起来：总势能只取决于 $y + r$。“在任何位置都处于平衡（equilibrium）”表示势能并不偏好任何位置，所以它沿着金属线必定是常数。既然势能是常数，能量守恒（conservation of energy）便告诉我们总动能（kinetic energy）永不改变，余下的工作只是用极坐标（polar coordinates）写出小珠的速率。

解答

模型。P 和 B 是质量为 m 的质点；绳是轻而不可伸长（light and inextensible）的；小环和金属线都是光滑（smooth）的，所以绳的张力（tension）所作的净功为零，而金属线的法向反作用力（normal reaction）不作功。取 O 为原点，x 轴水平，y 轴垂直向上，并设绳长为 L。



金属线的形状

由 O 到 B 的一段绳长为 r，所以 OP 的长度是 $L-r$，即 P 位于 O 之下 $L-r$ 的距离。取通过 O 的水平面为势能的零点，总势能为

$$U = mgy - mg(L-r) = mg(y+r) - mgL.$$

这个系统只有一个自由度（degree of freedom），即小珠在金属线上的位置，而平衡位置就是 U 沿金属线的驻点（stationary point）。如果每一个位置都是平衡位置，那么沿着金属线处处都有 $\mathrm{d}U/\mathrm{d}s = 0$（其中 s 是弧长（arc length）），所以 U 沿金属线是常数。因此 $y+r$ 是常数。

在 H 处，小珠位于 O 的正上方，高度为 h，所以该处 $y = h$ 且 $r = h$，这个常数就是 $2h$。于是金属线的方程是

$$y + r = 2h,$$

正如题目所求。（写成直角坐标形式，由 $x^2 + y^2 = (2h-y)^2$ 得 $y = h - x^2/(4h)$：这是一条以 O 为焦点（focus）的抛物线（parabola），如图所示。你也可以直接验证平衡：由于 P 处于平衡，张力是 mg；沿 BO 方向的 mg 与垂直向下的 mg 的合力（resultant）平分这两个方向之间的夹角，而根据抛物线的反射性质（reflection property），这正好是抛物线在该点的法线（normal）方向。）

θ 的变化率

在金属线上 $y = 2h - r$，所以

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2h}{r} - 1.$$

对时间求导，

$$\cos\theta\,\dot\theta = -\frac{2h\dot r}{r^2}.$$

由于 $\theta = \arcsin(y/r)$ 位于 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 之内，我们有 $\cos\theta \geq 0$，所以

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{2h-r}{r}\right)^2} = \frac{\sqrt{r^2 - (2h-r)^2}}{r} = \frac{\sqrt{4rh - 4h^2}}{r} = \frac{2\sqrt{rh-h^2}}{r}.$$

小珠离开 H 之后，我们有 $r > h$（因为 $r = 2h - y$，而在 H 以外 $y < h$），所以 $\cos\theta \neq 0$，可以放心相除：

$$\dot\theta = -\frac{2h\dot r}{r^2} \cdot \frac{r}{2\sqrt{rh-h^2}} = -\frac{h\dot r}{r\sqrt{rh-h^2}},$$

这就是所求的结果。

P 的速率

想一想 为甚么总动能必须一直等于 $\frac{1}{2}mV^2$?

对系统作功的力只有重力和绳的张力（属内力）。张力所作的净功为零：绳不可伸长，小环又光滑，所以张力对 B 所作的功与对 P 所作的功互相抵销。金属线是光滑的，所以它的反作用力不作功。因此动能与势能之和守恒。但我们刚刚证明了势能 U 沿这条金属线是常数，所以动能也是常数。

开始时小珠在 H，该处 r 取最小值 h（因为 y 在该处最大）。所以最初 $\dot{r}=0$，而 P 的速率是 $|\dot{r}|$，故它由静止开始运动。因此初始动能是 $\frac{1}{2}mV^2$。

在以 O 为极点的极坐标中，小珠速率的平方是 $\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2$。利用 $\dot{\theta}$ 的结果，

$$r^2\dot{\theta}^2=\frac{h^2\dot{r}^2}{rh-h^2}=\frac{h\dot{r}^2}{r-h},\qquad \text{所以}\qquad v_B^2=\dot{r}^2\Big(1+\frac{h}{r-h}\Big)=\frac{r\dot{r}^2}{r-h}.$$

由动能守恒，约去 $\frac{1}{2}m$ 之后得

$$\frac{r\dot{r}^2}{r-h}+\dot{r}^2=V^2\quad\Longrightarrow\quad \dot{r}^2\,\frac{2r-h}{r-h}=V^2.$$

由于 $r>h$，$r-h$ 和 $2r-h$ 都是正数，所以 P 的速率是

$$|\dot{r}|=V\Big(\frac{r-h}{2r-h}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

正如题目所求。

验算

- 在 H 处，$r=h$，公式给出 0：正确，因为 P 由静止开始。
- 当 $r\to\infty$ 时，P 的速率趋向 $V/\sqrt{2}$。在很远的地方，小珠几乎沿径向运动，所以 B 和 P 的速率几乎相等，两者平分动能。
- 数值验证：取 $h=1$ 和 $V=2$，我们沿 $y=1-\frac{1}{4}x^2$ 逐步计算小珠的运动方程（用 RK4），并把 $\dot{\theta}$ 和 $\dot{r}$ 的有限差分值与公式比较。在 $r\approx 4.043$ 时，P 的速率是 1.31064，与 $2\sqrt{3.043/7.087}$ 吻合至六位有效数字。

常见错误

- 把 P 的势能取为 $+mg(L-r)$：P 在 O 的下方，所以它的高度是 $-(L-r)$。
- 忘记 P 也在运动，于是写成 $\frac{1}{2}mv_B^2=\frac{1}{2}mV^2$。
- 除以 $\cos\theta$ 时，没有指出它只在 H 处才等于零。

STEP 之外

寻找一条曲线，使系统在其上处处都处于“随遇”平衡（neutral equilibrium），是“平衡位置即势能的驻点”这个原理的一个小例子。这个原理通往拉格朗日力学（Lagrangian mechanics），在那里，像绳和金属线这样的约束（constraints）是通过选取合适的坐标而直接纳入其中的。在这一题，单一个坐标 r 已经足够，而能量守恒就是首次积分（first integral）。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）正是以这种精神讲解能量方法和极坐标。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。