详细解答

STEP III 2006，第 8 题

纯数学 · 公理化微分法

STEP III 2006，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/06-s3-q8

关键思路

这四条规则正是你日常使用的求导（differentiation）性质：线性（linearity）和积法则（product rule），再加上一个事实，就是 x“求导后得”1。每个多项式（polynomial）都是由数字 1 和字母 x 经过相乘和相加构成的，所以只要知道 $\triangle$ 对 1 和对 x 的作用，这些规则就令它在其他地方再无任何自由。把积法则应用于 $x \cdot x^n$，便可对幂次作归纳法（induction），最后再由线性完成余下的工作。

解答

以下“规则 (i)”至“规则 (iv)”均指题目所给的四条定义规则，次序与题目相同。

常数

先考虑常数多项式 1。由于 $1 = 1 \cdot 1$，在规则 (iv) 中取 $f(x) = g(x) = 1$，得

$$\triangle 1 = \triangle(1 \cdot 1) = 1 \cdot \triangle 1 + 1 \cdot \triangle 1 = 2\,\triangle 1.$$

两边同时减去 $\triangle 1$，得 $\triangle 1 = 0$（零多项式）。

? **想一想** 为甚么不直接说“$\triangle$ 作用于常数得零，就像导数一样”？

因为我们还不知道 $\triangle$ 就是导数（derivative）；这正是最后一部分要我们证明的。我们能用的只有那四条规则，而其中没有一条直接提及常数。窍门在于 1 等于它自己的平方，所以积法则迫使 $\triangle 1$ 等于它自身的两倍。

现设 $f(x) = \lambda$ 为任意常数。则 $\lambda = \lambda \cdot 1$，故由规则 (iii)

$$\triangle\lambda = \triangle(\lambda \cdot 1) = \lambda \triangle 1 = \lambda \cdot 0 = 0.$$

所以对每个次数（degree）为零的多项式，都有 $\triangle f(x) = 0$，正如所求。

平方与立方

把 $x^2 = x \cdot x$ 写出，先用规则 (iv)，再用规则 (i)，

$$\triangle x^2 = x \triangle x + x \triangle x = x \cdot 1 + x \cdot 1 = 2x.$$

把 $x^3 = x \cdot x^2$ 写出，先用规则 (iv)，再用刚得到的结果和规则 (i)，

$$\triangle x^3 = x \triangle x^2 + x^2 \triangle x = x \cdot 2x + x^2 \cdot 1 = 3x^2.$$

一般多项式

*步骤 1：x 的幂。*我们用归纳法证明

$$\triangle x^n = n\, x^{n-1} \qquad \text{对每个整数} n \geq 1.$$

当 $n = 1$ 时，这就是 $\triangle x = 1$，即规则 (i)。假设结果对某个 $n = k \geq 1$ 成立。由于 $x^{k+1} = x \cdot x^k$，规则 (iv) 给出

$$\begin{aligned} \triangle x^{k+1} &= x \triangle x^k + x^k \triangle x \\ &= x \cdot k\, x^{k-1} + x^k \cdot 1 \\ &= (k+1)\, x^k, \end{aligned}$$

其中第二行用了归纳假设（induction hypothesis）和规则 (i)。所以结果对 $n = k+1$ 成立，由归纳法可知它对所有 $n \geq 1$ 成立。当 $n = 0$ 时，$x^0 = 1$，而我们已证明 $\triangle 1 = 0$，这与 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 1 = 0$ 一致。所以对每个 $n \geq 0$，

$$\triangle x^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, x^n.$$

*步骤 2：多项之和。*规则 (ii) 只是就两个多项式而言，但它可以推广至任意有限个。若 $\triangle(f_1 + \cdots + f_m) = \triangle f_1 + \cdots + \triangle f_m$，则把规则 (ii) 应用于 $f_1 + \cdots + f_m$ 和 f_{m+1} 这两个多项式，得

$$\triangle(f_1 + \cdots + f_{m+1}) = \triangle(f_1 + \cdots + f_m) + \triangle f_{m+1} = \triangle f_1 + \cdots + \triangle f_{m+1},$$

所以对 m 作归纳法，可知它对任意多项都成立。

步骤 3：综合起来。任何多项式都可以写成 $h(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$，其中 a_k 为常数。于是

$$\begin{aligned}
\triangle h(x) &= \sum_{k=0}^{n} \triangle\left(a_k x^k\right) && \text{根据规则 (ii)，并按步骤 2 推广}\\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \triangle x^k && \text{根据规则 (iii)}\\
&= \sum_{k=1}^{n} k\, a_k\, x^{k-1} && \text{根据步骤 1（}k=0\text{ 的项为 0）}\\
&= \frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x},
\end{aligned}$$

最后一行就是多项式通常的导数。这对每个多项式 $h(x)$ 都成立，所以 $\triangle h(x) \equiv \dfrac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}$，正如所求。

验算

令人安心的是，普通的求导确实符合全部四条规则，所以这些规则并不互相矛盾，而 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ 的确是题目所描述的那类运算。你也可以用公式来检验积法则：取 $f=x^2$ 和 $g=x^3$，规则 (iv) 给出 $x^2\cdot 3x^2 + x^3\cdot 2x = 5x^4$，这正是 $\triangle x^5$。我们在电脑上只用这些规则（如步骤 1 至 3）构造出 $\triangle$，并把它与导数作精确比较，共测试了 2000 个次数不超过 9 的随机多项式；例如 $\triangle\left(\frac{1}{2}x^4 - 3x + 7\right) = 2x^3 - 3$，这也与数值差商（difference quotient）吻合。

常见错误

- 断言 $\triangle(\text{常数}) = 0$，“因为它是导数”。这是预先假设了最终答案；这个结果必须由规则推导出来。
- 不加说明就把规则 (ii) 用于一长串的和。规则只是就两个多项式而言，所以项数更多时，需要用一句话交代归纳法。
- 没有说明哪一步用了哪条规则：题目明确要求这样做。

STEP 之外

符合线性和积法则的运算称为*导子*（derivation），而这里的论证显示，在多项式上，导子完全由它在 x 上的值决定。假如改为 $\triangle x = p(x)$，其中 p 为某个多项式，同样的证明会给出 $\triangle h = p(x)\,h'(x)$。求导可以纯粹用代数方法定义，完全不涉及极限，这个想法在抽象代数（abstract algebra）和微分几何（differential geometry）中占有核心地位；在微分几何中，向量场（vector field）正正就是函数上的导子。Allenby 的 *Rings, Fields and*

Groups（环、域与群）是认识以代数方式处理多项式环（polynomial ring）的好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。