详细解答

STEP III 2006，第 7 题

纯数学 · 一阶微分方程

STEP III 2006，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/06-s3-q7

关键思路

两条微分方程（differential equation）都是关于 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 的二次方程。我们不急于把它们当作微分方程来处理，而是先就导数（derivative）解出每条二次方程，这样原方程便分拆成两条普通的一阶方程。利用双曲恒等式（hyperbolic identities），两个根会化简成很简单的形式，而 $x = 0$ 处的条件则告诉我们应该跟随哪一个根。

解答

第 (i) 部分

由二次公式（quadratic formula），

$$u = -\sinh x \pm \sqrt{\sinh^2 x + 1} = -\sinh x \pm \cosh x,$$

因为 $\sinh^2 x + 1 = \cosh^2 x$ 而且 $\cosh x > 0$。利用 $\cosh x + \sinh x = \mathrm{e}^x$ 和 $\cosh x - \sinh x = \mathrm{e}^{-x}$，两个根是

$$u = \mathrm{e}^{-x} \qquad 或 \qquad u = -\mathrm{e}^x.$$

微分方程就是这条二次方程，其中 $u = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$，所以在每一个 x 处必有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-x} \qquad 或 \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{e}^x.$$

第一个根恒为正，第二个根恒为负，所以两者永不相等。因此，导数连续（continuous）的解不可能由一个根跳到另一个根，而 $x = 0$ 处 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x > 0$ 这个条件，就决定了自始至终都取第一个根。积分后得 $y = -\mathrm{e}^{-x} + c$，再由 $x = 0$ 时 $y = 0$ 得 $c = 1$：

$$y = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

第 (ii) 部分

设 $p = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$。若 $\sinh y = 0$，即 $y = 0$，方程便化为 $2p = 0$。$y \equiv 0$ 就是这样成为一个解的，而题目正是叫我们把这个解撇开不理。在 $y \neq 0$ 之处，由二次公式得

$$p = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \sinh^2 y}}{\sinh y} = \frac{-1 \pm \cosh y}{\sinh y}.$$

利用半角形式（half-angle forms）$\cosh y - 1 = 2\sinh^2 \frac{y}{2}$、$\cosh y + 1 = 2\cosh^2 \frac{y}{2}$ 和 $\sinh y = 2\sinh \frac{y}{2} \cosh \frac{y}{2}$，两个根是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tanh \frac{y}{2} \qquad 或 \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\coth \frac{y}{2}.$$

这两个根永不相等，因为它们的积是 -1，而若两根相等，其积应为 $\tanh^2 \frac{y}{2} \geq 0$。

想一想 两条方程之中，哪一条可以给出一个通过原点而又不恒等于零的解?

第一条方程 $y' = \tanh \frac{y}{2}$ 有解 $y \equiv 0$。它的右边是 y 的光滑函数（smooth function），所以通过 $(0,0)$ 的解就只有这一个：这又是那个平凡解（trivial solution）。第二条方程在 $y = 0$ 处是奇异（singular）的，该处 $|\mathrm{d}y/\mathrm{d}x| \to \infty$，所以它的解曲线可以带着铅垂切线与 $y = 0$ 相交。这正是我们要找的解。分离变量（separating the variables），

$$\int \tanh \frac{y}{2} \, \mathrm{d}y = -\int \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad 2\ln\cosh \frac{y}{2} = -x + C.$$

代入 $x = 0$ 时 $y = 0$，得 $C = 0$，所以 $\cosh^2 \frac{y}{2} = \mathrm{e}^{-x}$。由于 $\cosh y = 2\cosh^2 \frac{y}{2} - 1$，

$$\cosh y = 2\mathrm{e}^{-x} - 1.$$

我们可以直接验证这个结果。求导得 $\sinh y \, y' = -2\mathrm{e}^{-x} = -(\cosh y + 1)$，这正是 $y' = -\coth \frac{y}{2}$。无论 y 是正是负，这都成立，所以整条曲线，包括上半和下半，都是解。由于 $\cosh y \geq 1$，曲线只在 $x \leq 0$ 时存在。它关于 x 轴对称。在原点附近 $1 + \frac{1}{2}y^2 \approx 1 - 2x$，所以曲线在那里看起来像抛物线 $y^2 = -4x$。

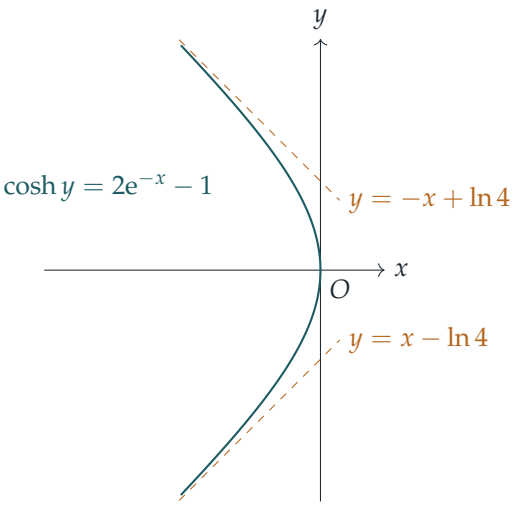
渐近线（asymptotes）。当 $x \to -\infty$ 时，$\cosh y \to \infty$，所以 $|y| \to \infty$。设 $w = 2\mathrm{e}^{-x} - 1$，则

$$|y| = \operatorname{arcosh} w = \ln\bigl(w + \sqrt{w^2 - 1}\bigr),$$

所以

$$|y| - (-x + \ln 4) = \ln \frac{w + \sqrt{w^2 - 1}}{4\mathrm{e}^{-x}} = \ln\Bigl(\frac{w}{4\mathrm{e}^{-x}}\Bigl(1 + \sqrt{1 - w^{-2}}\Bigr)\Bigr).$$

当 $x \to -\infty$ 时，$w/(4\mathrm{e}^{-x}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{x} \to \frac{1}{2}$，而 $1 + \sqrt{1 - w^{-2}} \to 2$，所以对数内的式子趋向 1，上述差值趋向 0。因此曲线的上半趋近 $y = -x + \ln 4$，而由对称性，下半趋近 $y = -(-x + \ln 4)$。渐近线是 $y = \pm(-x + \ln 4)$，正如题目所求。（当 $x \to 0^-$ 时曲线保持有界，所以渐近线就只有这两条。）



验算

- 在 (i) 中，$y = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ 的导数是 $y' = \mathrm{e}^{-x}$，而 $\mathrm{e}^{-2x} + 2\mathrm{e}^{-x}\sinh x - 1 = \mathrm{e}^{-2x} + (1 - \mathrm{e}^{-2x}) - 1 = 0$。
- 在 (ii) 中，由原点附近开始，以数值方法逐步求解 $y' = -\coth\frac{y}{2}$ 直到 $x = -6$，得 $y \approx 7.38505$，与 $\operatorname{arcosh}(2\mathrm{e}^6 - 1)$ 吻合。在 $x = -10$ 处，曲线与 $-x + \ln 4$ 之间的差距约为 2×10^{-5}。

常见错误

- 在 (i) 中取了 $-\sinh x - \cosh x = -\mathrm{e}^x$ 这个根：这样导数在 $x = 0$ 处是负数。
- 在 (ii) 中因为 $y' = \tanh\frac{y}{2}$ 在 $y = 0$ 处“性质良好”而选了它。通过原点时，它只给出 $y \equiv 0$。
- 忘记了曲线的下半；这一半有 $y < 0$，第二条渐近线正是由它而来。

STEP 之外

像这两条方程一样，对 y' 而言并非线性的方程，称为一阶隐式（first-order implicit）方程。就 y' 求解，会把它分拆成若干个分支。第 (ii) 部分亦显示解的唯一性（uniqueness）可以不成立：在 $y = 0$ 处，右边的 $-\coth\frac{y}{2}$ 不满足利普希茨（Lipschitz）条件，所以一个非平凡解才可以与 $y \equiv 0$ 从同一点出发。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科书）讲述了存在性与唯一性定理，以及这些定理在甚么情

况下适用。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。