详细解答

STEP III 2006，第 6 题

纯数学 · 极坐标曲线与反射

STEP III 2006，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/06-s3-q6

关键思路

斜率（gradient）公式不过是把链式法则（chain rule）应用于 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 而已。至于镜面，把极点（pole）设在 O，并令始线（initial line）沿着 L：这样，在点 P 反射的光线便沿着径向直接返回，因此其方向只由 θ 决定。反射定律（law of reflection）指出法线（normal）平分两条光线之间的夹角，于是法线（以至切线（tangent））便可用 θ 确定下来。这样一来，几何问题就化为关于 $r(\theta)$ 的可分离变量微分方程（separable differential equation）。

解答

极坐标下的斜率

由 $r = r(\theta)$ 给出的曲线，其直角坐标（Cartesian coordinates）为 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，其中 r 是 θ 的函数。利用积法则（product rule）对 θ 求导，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta.$$

根据链式法则，凡是 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta \neq 0$ 之处，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\tan\theta + r}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} - r\tan\theta},$$

这里把分子和分母同除以 $\cos\theta$（当 $\cos\theta \neq 0$ 时可以这样做）。这就是所求的斜率。

未经相除的形式也值得保留：向量

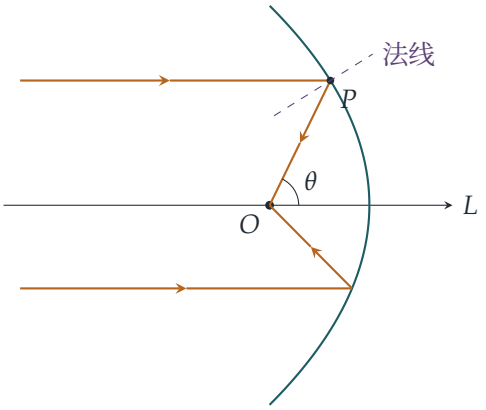
$$\mathbf{t} = \left(\tfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta,\ \tfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta\right)$$

在曲线上每一点都沿着切线方向，包括 $\tan\theta$ 或斜率无定义的地方。

镜面

任取一个包含 L 的平面 Π，并设 P 为镜面与 Π 相交的一点。在 P 的入射光线（incident ray）平行于 L，所以它位于 Π 之内；反射光线（reflected ray）通过 O，而该点在 L 上，所以它同样位于 Π 之内。反射定律亦要求在 P 的法线位于两条光线所在的平面内，因此法线位于 Π 之内，而交线在 P 的切线就是 Π 内与法线垂直的那条直线。所以一切都发生在平面 Π 之内，我们可以在二维中处理问题。

在 Π 内采用极坐标（polar coordinates），以 O 为极点，始线沿着 L，并选定方向使入射光沿 $\theta = 0$ 的方向行进（即图中由左至右）。设 P 为 (r,θ)，其中 $-\pi < \theta < \pi$。（$\theta = \pi$ 所对应的点位于 L 上、O 的后方，光线在那里会直接穿过 O，根本不需要镜面。）



法线的方向。 在 P 取两个沿着光线、背向 P 的单位向量（unit vectors）：

$$\mathbf{a} = (-1,\, 0)\ \text{（沿入射光线往回走）}, \qquad \mathbf{b} = (-\cos\theta,\, -\sin\theta)\ \text{（指向 } O\text{）}.$$

法线与 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 所成的角相等，所以它沿着两者夹角的平分线，亦即 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 的方向（两个单位向量所构成的菱形，其对角线平分它们的夹角）。现在

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = -(1+\cos\theta,\, \sin\theta) = -2\cos\tfrac{\theta}{2}\left(\cos\tfrac{\theta}{2},\, \sin\tfrac{\theta}{2}\right),$$

这里用了 $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ 和 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$。由于 $-\pi < \theta < \pi$，$\cos\frac{\theta}{2} > 0$，所以这个向量非零，而在 P 的法线沿着

$$\mathbf{n} = \left(\cos\tfrac{\theta}{2},\, \sin\tfrac{\theta}{2}\right):$$

法线与 L 所成的角为 $\frac{\theta}{2}$。

想一想 为甚么不直接令斜率公式等于切线的斜率?

这样做是可以的：切线垂直于 $\mathbf{n}$，所以其斜率为 $-\cot\frac{\theta}{2}$，令它等于极坐标公式并去分母，便会得到与下文相同的方程。不过这条路要除以 $\tan\theta$、$\cot\frac{\theta}{2}$ 以及公式中的分母，所以在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ 处行不通。采用切向量 $\mathbf{t}$ 则可避开这一切麻烦。

微分方程。 切线垂直于法线，所以 $\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}=0$：

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\left(\cos\theta\cos\tfrac{\theta}{2}+\sin\theta\sin\tfrac{\theta}{2}\right)+r\left(\cos\theta\sin\tfrac{\theta}{2}-\sin\theta\cos\tfrac{\theta}{2}\right)=0.$$

根据复角公式（compound-angle formulae），两个括号分别等于 $\cos\left(\theta-\frac{\theta}{2}\right)=\cos\frac{\theta}{2}$ 和 $\sin\left(\frac{\theta}{2}-\theta\right)=-\sin\frac{\theta}{2}$。因此

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\tfrac{\theta}{2}=r\sin\tfrac{\theta}{2},\qquad\text{即}\qquad\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\tan\tfrac{\theta}{2},$$

这里除以了 $r\cos\frac{\theta}{2}$，由于 $P\neq O$ 且 $-\pi<\theta<\pi$，它是正数。

求解。 这个方程是可分离变量的。对 θ 积分，并注意到 $\int\tan\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta=-2\ln\cos\frac{\theta}{2}$（因为 $\cos\frac{\theta}{2}>0$，此式成立），

$$\ln r=-2\ln\cos\tfrac{\theta}{2}+C\quad\Longrightarrow\quad r\cos^2\tfrac{\theta}{2}=k,$$

其中 $k=\mathrm{e}^C>0$ 沿着整条曲线是常数（曲线是区间 $-\pi<\theta<\pi$ 上单独一段连通的 $r=r(\theta)$）。利用 $2\cos^2\frac{\theta}{2}=1+\cos\theta$，

$$r(1+\cos\theta)=2k.$$

转换为直角坐标。 以 $x=r\cos\theta$ 和 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 代入，上式变成 $\sqrt{x^2+y^2}=2k-x$。两边平方（两边均为非负，因为 $2k-x=r\geq0$），

$$x^2+y^2=4k^2-4kx+x^2\qquad\Longrightarrow\qquad y^2=4k(k-x).$$

这是一条抛物线（parabola），以 L 为轴，顶点（vertex）在 $(k,0)$，焦点（focus）在原点 O，开口朝向入射光的来向。由于 Π 是任意一个包含 L 的平面，镜面与每一个这样的平面的交线都是抛物线，这正是所要证明的。■

验算

- 倒过来检验：在 $y^2=4k(k-x)$ 上，法线沿着 $(4k,2y)$；把方向 $(1,0)$ 对这条法线作反射，便得到一条通过 O 的光线。我们以数值方法在 10^4 个随机点上验证了这一点

（取 $k = 1.3$），并且用有限差分（finite differences）验证了 $r = 2k/(1+\cos\theta)$ 满足 $r'/r = \tan\frac{\theta}{2}$。

- 对于随机选取的曲线 $r(\theta)$，斜率公式与有限差分所得的斜率相符，误差约为 10^{-8}。
- 在 $\theta = 0$ 处，法线沿着 L，而切线垂直于 L：这就是顶点 $(k, 0)$，沿 L 射来的光线在那里会直接反射回来并通过 O。

常见错误

- 以外角平分线（external bisector）$\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 作为法线。这个方向与两条光线所成的角是互补而非相等，并会导致 $r'/r = -\cot\frac{\theta}{2}$，其解 $r(1-\cos\theta) = 2k$ 是一条开口朝相反方向的抛物线，所聚焦的是从相反方向射来的光。
- 忘记解释为何问题是二维的：法线必须位于包含 L 和 P 的平面内，否则交线的切线未必就是我们所用的那一条。
- 把 $\sqrt{x^2+y^2} = 2k - x$ 两边平方时，没有指出两边均为非负。

STEP 之外

这块镜面是一个旋转抛物面（paraboloid of revolution），而这里所证明的性质其实就是焦点－准线（focus–directrix）性质的另一种面貌：$r(1+\cos\theta) = 2k$ 是说，与 O 的距离等于与直线 $x = 2k$ 的距离。这正是卫星碟形天线、汽车车头灯和反射望远镜都采用抛物面的原因。更一般地说，所有圆锥曲线（conics）都具有极坐标形式 $r(1+e\cos\theta) = \ell$，而这恰恰就是牛顿（Newton）求解行星轨道时所出现的式子；Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）由平方反比定律（inverse-square law）把它推导出来。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。