详细解答

STEP III 2006，第 5 题

纯数学 · 复数与几何

STEP III 2006，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/06-s3-q5

关键思路

一个三角形是等边三角形（equilateral triangle），当且仅当从某个顶点看，其中一条边是另一条边旋转 60° 的结果。在复数（complex number）中，这个旋转就是乘以 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi/3}$，而这两个数正好是 $t^2 - t + 1 = 0$ 的根。把原点移到其中一个顶点，那个对称式便恰好化为这个二次式。此后，三次方程的部分用韦达公式（Vieta's formulae）即可，而最后一部分只需留意 $z \mapsto pw + q$ 只是把图形旋转、缩放和平移。

解答

等边三角形的条件

设 $u = \beta - \alpha$ 和 $v = \gamma - \alpha$，即由顶点 α 出发的两条边。由于各点互不相同，$u \neq 0$、$v \neq 0$ 且 $u \neq v$。首先，

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta = \tfrac{1}{2}[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2],$$

把右边展开即可验证。现在 $\alpha - \beta = -u$、$\gamma - \alpha = v$ 及 $\beta - \gamma = u - v$，所以方括号内的式子是 $u^2 + (u - v)^2 + v^2 = 2(u^2 - uv + v^2)$。因此

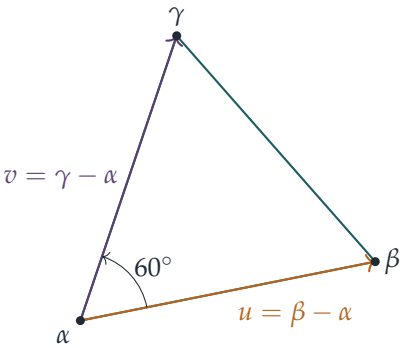
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta = u^2 - uv + v^2 = u^2(t^2 - t + 1), \qquad t = \frac{v}{u}.$$

由于 $u \neq 0$，这个式子等于零当且仅当 $t^2 - t + 1 = 0$，即

$$t = \frac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi/3}.$$

想一想 为甚么 $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi/3}$ 恰好表示这个三角形是等边三角形?

v/u 的模（modulus）是 $|\gamma-\alpha|/|\beta-\alpha|$，而它的辐角（argument）是在 α 处由边 $\alpha\beta$ 转到边 $\alpha\gamma$ 的角。所以 $v/u=\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi/3}$ 的意思是：由 α 出发的两条边相等，而它们之间的夹角是 $60°$。这样的等腰三角形，底角是 $\frac{1}{2}(180°-60°)=60°$，所以它是等边三角形。反过来，如果三角形是等边的，则 $|v|=|u|$，而 α 处的角是 $60°$，至于向哪一边转则视乎三角形的定向（orientation），所以 $v/u=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ 或 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$。



因此，这些互不相同的点（不论次序）构成等边三角形，当且仅当该式等于零，正如题目所要求。

三次方程

设 $(*)$ 的根为 α,β,γ。根据韦达公式，$\alpha+\beta+\gamma=-a$ 及 $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$。所以

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta&=(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\&=a^2-3b.\end{aligned}$$

根据第一个结果，这些（互不相同的）根构成等边三角形，当且仅当 $a^2-3b=0$，即 $a^2=3b$。

有一点要留意：第一个结果需要各点互不相同。如果有两个根重合，例如 $\alpha=\beta$，该式便化为 $(\gamma-\alpha)^2$，所以只有当三个根全部相等时它才等于零。因此，在有重根（repeated root）的情况下，$a^2=3b$ 只会在三重根时出现，即 $z^3+az^2+bz+c=(z+\frac{a}{3})^3$，亦即同时有 $c=a^3/27$。除了这个只有一点的退化“三角形”之外，$a^2=3b$ 正是所求的条件。

变换

把 $z = pw + q$ 代入 $(*)$，再除以 $p^3 \neq 0$：

$$w^3 + \frac{3q + a}{p} w^2 + \frac{3q^2 + 2aq + b}{p^2} w + \frac{q^3 + aq^2 + bq + c}{p^3} = 0.$$

所以

$$A = \frac{3q + a}{p}, \qquad B = \frac{3q^2 + 2aq + b}{p^2},$$

因而

$$A^2 - 3B = \frac{(9q^2 + 6aq + a^2) - (9q^2 + 6aq + 3b)}{p^2} = \frac{a^2 - 3b}{p^2}.$$

如果 $(*)$ 的根构成等边三角形，则它们互不相同，而且 $a^2 = 3b$，所以 $A^2 = 3B$。$(**)$ 的根是 $w = (z - q)/p$，其中 z 是 $(*)$ 的根；由于 $p \neq 0$，这个映射是一对一（one-to-one）的，所以这些根同样互不相同。根据上一个结果，$(**)$ 的根构成等边三角形。

从几何角度看，这并不意外：$w = (z - q)/p$ 是平移 $-q$、旋转 $-\arg p$ 再缩放 $1/|p|$ 倍，而这些运算都不会破坏等边三角形。用第一部分的说法，每条边都除以 p，所以比 v/u 不变。

验算

- 单位立方根（cube roots of unity）$1, \omega, \omega^2$ 构成等边三角形，而且是 $z^3 - 1 = 0$ 的根，其中 $a = b = 0$，所以 $a^2 = 3b$ 成立。
- 取 $\alpha = 0$、$\beta = 1$ 及 $\gamma = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，该式为 $1 + \gamma^2 - \gamma$，它等于零，因为 $\gamma = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ 是 $t^2 - t + 1$ 的根。
- 以 1000 组随机三元组作数值验算，证实了对于以这些数为根的三次方程，$\sum \alpha^2 - \sum \alpha\beta = a^2 - 3b$ 成立。同一验算亦证实了 $A^2 - 3B = (a^2 - 3b)/p^2$，以及在随机选取的 p 和 q 之下，构成等边三角形的根仍然构成等边三角形。

常见错误

- 只检查一种定向：$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ 和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$ 都会出现，而“当且仅当”需要两者兼顾。
- 忘记了正是因为 $u \neq 0$（各点互不相同），我们才可以除以 u^2。
- 代入时把 B 算错：w 的系数包括来自立方项的 $3q^2$、来自平方项的 $2aq$，以及 b，全部再除以 p^2。

STEP 之外

映射 $z \mapsto pz + q$ 就是平面上的正向相似变换（direct similarity）。在这些映射下保持不变的量，例如比 $(\gamma - \alpha)/(\beta - \alpha)$，或者 $a^2 - 3b$ 是否等于零，称为不变量（invariant），这是几何和代数中的核心概念。$a^2 - 3b$ 这个式子（除了一个常数因子外）就是 f' 的判别式（discriminant），其中 $f(z) = z^3 + az^2 + bz + c$。这又连系到一个漂亮的事实——Marden 定理（Marden's theorem）：以 f 的根为顶点的三角形，有一个椭圆与它的三边相切于各边中点，而 f' 的根正是这个椭圆的焦点。对于等边三角形，这个椭圆是一个圆，它的两个焦点合而为一，成为 f' 的二重根。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）正是以这种精神来阐述复数几何。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。