详细解答

STEP III 2006，第 4 题

纯数学 · 函数方程

> **STEP III 2006，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q4

关键思路

开首的恒等式（identity）就是柯西函数方程（Cauchy's functional equation）。代入 $y = x$，便得到 f 在 x 与在 $2x$ 的值之间的关系；把这个关系求导 n 次，再令 $x = 0$，麦克劳林级数（Maclaurin series）的系数便几乎全部消失。其后每一部分都是同一条方程的变奏：只要作一个变量代换（change of variable）（对数、指数、正切），新的恒等式就会变回 $(*)$，于是可以直接套用已经得到的答案。

解答

基本方程

在 $(*)$ 中代入 $y = x$：$\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(2x)$，即

$$2\mathrm{f}(x) \equiv \mathrm{f}(2x).$$

这是关于 x 的恒等式，所以两边可以求导。根据链式法则（chain rule），每对 $\mathrm{f}(2x)$ 求导一次，就多出一个因子 2，因此求导 n 次之后得

$$2\mathrm{f}^{(n)}(x) \equiv 2^n \mathrm{f}^{(n)}(2x).$$

令 $x = 0$，得 $(2 - 2^n)\,\mathrm{f}^{(n)}(0) = 0$。取 $n = 2$，此式即 $-2\mathrm{f}''(0) = 0$，所以 $\mathrm{f}''(0) = 0$，正是所求。

同样的论证对每个 $n \neq 1$ 都成立：因子 $2 - 2^n$ 只在 $n = 1$ 时才等于零，所以

$$\mathrm{f}(0) = 0 \quad \text{及} \quad \mathrm{f}^{(n)}(0) = 0 \ \text{对所有} n \geq 2.$$

（$n = 0$ 的情况就是 $2f(0) = f(0)$。）麦克劳林级数中只有一次项留下来：

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \tfrac{1}{2!}f''(0)\,x^2 + \cdots = kx, \qquad k = f'(0).$$

反过来，$kx + ky = k(x+y)$，所以每个这样的函数都满足方程。$(*)$ 的通解是 $f(x) = kx$，其中 k 是任意常数。

第 (i) 部分

要取对数，必须有 $g > 0$，所以先处理正负号的问题。代入 $x = y = \frac{1}{2}s$，得 $g(s) = (g(\frac{1}{2}s))^2 \geq 0$。若对某个 a 有 $g(a) = 0$，则对每个 x，

$$g(x) = g(a)\,g(x-a) = 0,$$

所以 $g \equiv 0$，而它确实满足恒等式。否则对所有 x 都有 $g(x) > 0$，于是 $G = \ln g$ 处处有定义。对 $g(x)g(y) = g(x+y)$ 取对数，得

$$G(x) + G(y) = G(x+y),$$

这正是 $(*)$。所以 $G(x) = kx$，而

$$g(x) = e^{kx}$$

其中 k 为常数；它显然满足恒等式，因为 $e^{kx}e^{ky} = e^{k(x+y)}$。除了平凡解 $g \equiv 0$ 之外，这些就是全部的解。

第 (ii) 部分

每个正数 x 都可以唯一地写成 e^u，其中 u 是实数，即 $u = \ln x$。所以我们可以写 $x = e^u$ 和 $y = e^v$，其中 u 和 v 取遍所有实数。这时 $xy = e^{u+v}$，恒等式变成

$$H(u) + H(v) = h(e^u) + h(e^v) = h(e^{u+v}) = H(u+v)$$

对所有实数 u、v 成立。这又是 $(*)$，所以 $H(u) = ku$。由于 $u = \ln x$，

$$h(x) = k\ln x \qquad (x > 0),$$

而它满足恒等式，因为 $\ln x + \ln y = \ln(xy)$。

第 (iii) 部分

式子 $\dfrac{x+y}{1-xy}$ 其实是乔装了的正切加法公式（tangent addition formula）。设 $x = \tan u$ 和 $y = \tan v$，其中 $u, v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，于是 $u = \arctan x$ 及 $v = \arctan y$。那么

$$z = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} = \tan(u+v).$$

在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上定义 $\mathrm{T}(u) = \mathrm{t}(\tan u)$。只要 $u+v$ 也落在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 之内，恒等式就给出

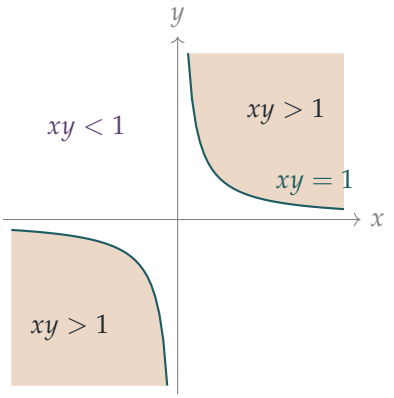
$$\mathrm{T}(u) + \mathrm{T}(v) = \mathrm{t}(x) + \mathrm{t}(y) = \mathrm{t}(\tan(u+v)) = \mathrm{T}(u+v).$$

想一想 处理 $(*)$ 的论证用到恒等式对所有 x 和 y 成立。如果我们只知道它在 u、v 和 $u+v$ 都属于 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 时成立，论证还行得通吗?

行得通。麦克劳林级数的论证只涉及 0 附近的情况。当 $|u| < \frac{\pi}{4}$ 时可以取 $v = u$（这时 $|2u| < \frac{\pi}{2}$），于是在 0 附近有 $2\mathrm{T}(u) = \mathrm{T}(2u)$。在 $u = 0$ 处求导 n 次，与之前完全一样得到 $(2 - 2^n)\mathrm{T}^{(n)}(0) = 0$，所以 $\mathrm{T}(u) = ku$。由于 $u = \arctan x$，

$$\mathrm{t}(x) = k \arctan x.$$

究竟对哪些 x 和 y 这个答案才真正成立? 若 $xy < 1$, 则 $u+v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$。当 u 和 v 异号时，这是必然的。当两者皆为正数时，$\tan u \tan v < 1$ 表示 $\tan v < \cot u = \tan(\frac{\pi}{2} - u)$，所以 $u + v < \frac{\pi}{2}$；两者皆为负数的情况由对称性同理可得。因此 $\arctan x + \arctan y = \arctan z$，恒等式成立。然而若 $xy > 1$，$u+v$ 便落在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 之外，这时 $\arctan z = u + v \mp \pi$。例如 $x = y = 2$ 给出 $z = -\frac{4}{3}$，而 $2\arctan 2 - \arctan(-\frac{4}{3}) = \pi$。



所以 $\mathrm{t}(x) = k \arctan x$ 对每一对满足 $xy < 1$ 的数都符合恒等式，也就是图中包含原点的区域。这就是题目想要的答案。在 $xy > 1$ 的阴影区域内，等式两边相差 $\pm k\pi$。如果我们坚持恒等式要对每一对满足 $xy \neq 1$ 的数都毫无例外地成立，那就只剩下 $k = 0$，唯一的解是 $\mathrm{t} \equiv 0$。

验算

- 对于第 (iii) 部分，把恒等式对 y 求导，然后代入 $y = 0$。由于 $\partial z/\partial y = (1+x^2)/(1-xy)^2$, 在 $y = 0$ 时等于 $1 + x^2$, 我们得到 $\mathrm{t}'(0) = \mathrm{t}'(x)(1+x^2)$。所以 $\mathrm{t}'(x) = k/(1+x^2)$，再配合 $\mathrm{t}(0) = 0$，积分便得 $k \arctan x$。对 $(*)$ 用同样的技巧，立即得到 $\mathrm{f}'(x) = \mathrm{f}'(0)$。

- 我们对全部四个答案各用 10^4 对随机数作了数值检验。在第 (iii) 部分，$k\arctan x$ 在约 5×10^4 对满足 $xy<1$ 的随机数上全部符合恒等式，而在每一对满足 $xy>1$ 的数上，误差的大小都恰好是 $k\pi$。

常见错误

- 忘记处理常数项：$\mathrm{f}(0)=0$ 来自 $n=0$ 的情况，所以答案是 kx，而不是 $kx+c$。
- 没有检查 $\mathrm{g}>0$ 就取 $\ln\mathrm{g}$。零函数是第 (i) 部分名副其实的一个解。
- 以为 $\arctan x+\arctan y=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$ 总是成立。它需要 $xy<1$。

STEP 之外

即使不假设麦克劳林级数存在，柯西方程 $(*)$ 所需的条件其实少得多：只要 f 连续（continuous）（甚至只需在某个区间上有界（bounded）），仍然可以推出 $\mathrm{f}(x)=kx$，出发点是对有理数 q 有 $\mathrm{f}(q)=q\,\mathrm{f}(1)$。不过，利用选择公理（axiom of choice），可以构造出并非线性的怪异解，它们的图像在平面上稠密（dense）。第 (i) 部分还说明，指数函数本质上是由加法到乘法的唯一连续同态（homomorphism），这个想法在群论（group theory）中反复出现。想看这类连续性与稠密性论证的严谨处理，Abbott 的 *Understanding Analysis* 是很好的入门读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。