详细解答

STEP III 2006，第 3 题

纯数学 · 幂级数的系数

STEP III 2006，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/06-s3-q3

关键思路

我们完全不必反复对 $\tan x$ 求导。每一条三角恒等式（trigonometric identity）都把其中两个函数连系起来，因而化为它们的系数（coefficient）之间的一条关系式。只要比较 x^n 的系数，三个级数就全由 b_n 这一个数列决定。接着，毕氏恒等式（Pythagorean identity）$\cot^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x$ 给出 b_n 必须满足的方程，我们可以逐个解出。

解答

第 (i) 部分

若一个幂级数（power series）在 0 附近收敛（converge）至某函数，它就是该函数的麦克劳林级数（Maclaurin series），所以 $a_n = \tan^{(n)}(0)/n!$。而 tan 是奇函数（odd function）：$\tan(-x) = -\tan x$。对奇函数求导得到偶函数（even function），对偶函数求导则得到奇函数。因此 tan 的每个偶数阶导数都是奇函数，而奇函数在 0 处的值为零。故此当 n 为偶数时 $\tan^{(n)}(0) = 0$，于是当 n 为偶数时 $a_n = 0$。换言之，这个级数只含 x 的奇数次幂。同样的论证适用于 $\cot x - \frac{1}{x} = \sum b_n x^n$，它也是奇函数，所以当 n 为偶数时 $b_n = 0$。我们稍后亦会从下面的关系式得出这个结论。

至于恒等式，把各项通分，以 $\sin x \cos x$ 为分母：

$$\cot x - \tan x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\cot 2x.$$

现在取 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$，使 $2x$ 同样落在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 之内，于是可以使用 $\cot 2x$ 的级数，即以 $2x$

代替 x：

$$2\cot 2x = 2\left(\frac{1}{2x} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n 2^n x^n\right) = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} b_n x^n.$$

恒等式的左方是

$$\cot x - \tan x = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n) x^n.$$

两边的 $\frac{1}{x}$ 项互相抵消，余下两个幂级数，它们对 $(0, \frac{1}{4}\pi)$ 内的每个 x 都相等。

> **想一想** 为甚么我们可以比较两个无穷级数的系数?

若两个幂级数在整个区间上有相同的和，它们的系数便一一相等。把两者相减：所得的差是一个在整个区间上恒等于零的幂级数。于是它的各阶导数在该区间上都是零，再令 $x \to 0^+$，便知每个系数都是零。所以

$$b_n - a_n = 2^{n+1} b_n, \qquad \text{即} \qquad a_n = (1 - 2^{n+1})\, b_n,$$

这正是所要证明的。由于 $1 - 2^{n+1} \neq 0$，我们有 $b_n = a_n/(1 - 2^{n+1})$，所以每当 $a_n = 0$ 时 $b_n = 0$，也就是当 n 为偶数时。

第 (ii) 部分

同理，

$$\cot x + \tan x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\operatorname{cosec} 2x.$$

当 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$ 时，在 cosec 的级数中以 $2x$ 代替 x，得

$$2\operatorname{cosec} 2x = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} c_n x^n, \qquad \cot x + \tan x = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + a_n) x^n.$$

比较系数得 $b_n + a_n = 2^{n+1} c_n$。代入第 (i) 部分的 $a_n = (1 - 2^{n+1}) b_n$，

$$2^{n+1} c_n = (2 - 2^{n+1})\, b_n \quad \Longrightarrow \quad c_n = \frac{2 - 2^{n+1}}{2^{n+1}}\, b_n = (2^{-n} - 1)\, b_n,$$

这就是所求的结果。特别地，当 n 为偶数时同样有 $c_n = 0$。

第 (iii) 部分

把 $\cot x$ 和 $\operatorname{cosec} x$ 的级数乘以 x，

$$1 + x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = x\cot x, \qquad 1 + x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x\operatorname{cosec} x.$$

所以题目所述的等式就是 $x^2\cot^2 x + x^2 = x^2\operatorname{cosec}^2 x$。这是恒等式 $\cot^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x$ 乘以 x^2 的结果，而该恒等式则由 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ 除以 $\sin^2 x$ 得出。等式由此得证。

现在把它展开。下标为偶数的 b_n 和 c_n 都是零，所以

$$x\cot x = 1 + b_1x^2 + b_3x^4 + \cdots, \qquad x\operatorname{cosec} x = 1 + c_1x^2 + c_3x^4 + \cdots,$$

而等式变成

$$(1 + b_1x^2 + b_3x^4 + \cdots)^2 + x^2 = (1 + c_1x^2 + c_3x^4 + \cdots)^2.$$

把两边平方展开，

$$1 + (2b_1 + 1)x^2 + (2b_3 + b_1^2)x^4 + \cdots = 1 + 2c_1x^2 + (2c_3 + c_1^2)x^4 + \cdots.$$

由第 (ii) 部分，$c_1 = (\frac{1}{2} - 1)b_1 = -\frac{1}{2}b_1$ 及 $c_3 = (\frac{1}{8} - 1)b_3 = -\frac{7}{8}b_3$。

x^2 的系数：

$$2b_1 + 1 = 2c_1 = -b_1 \quad \Longrightarrow \quad b_1 = -\tfrac{1}{3}.$$

于是由第 (i) 部分得 $a_1 = (1 - 2^2)b_1 = (-3)(-\frac{1}{3}) = 1$，正如所求。

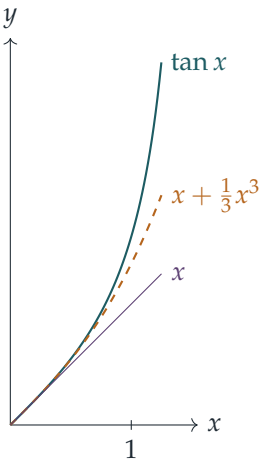
x^4 的系数：代入 $b_1 = -\frac{1}{3}$ 及 $c_1 = \frac{1}{6}$，

$$2b_3 + \tfrac{1}{9} = -\tfrac{7}{4}b_3 + \tfrac{1}{36} \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{15}{4}b_3 = -\tfrac{3}{36} = -\tfrac{1}{12} \quad \Longrightarrow \quad b_3 = -\tfrac{1}{45}.$$

因此

$$a_3 = (1 - 2^4)\,b_3 = (-15)\left(-\tfrac{1}{45}\right) = \tfrac{1}{3}.$$

所以 $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$。



验算

- 在 $x = 0.3$ 处，$\tan 0.3 \approx 0.309336$，而 $0.3 + \frac{1}{3}(0.3)^3 = 0.309$。两者相差约 3×10^{-4}，正好是下一项 $\frac{2}{15}x^5$ 的大小。

- $b_1 = -\frac{1}{3}$ 这个值与熟悉的 $\cot x \approx \frac{1}{x} - \frac{x}{3}$ 吻合。此外 $c_1 = \frac{1}{6}$ 与 $\operatorname{cosec} x \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{6}$ 吻合，后者可由 $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ 得出。
- 我们把 sin 和 cos 的级数相除，以有理数运算精确地验证了三条关系式对 48 以内的每个 n 都成立。我们亦验证了在 $(0,1)$ 内随机选取的点上，部分和（partial sum）与 tan、cot 和 cosec 的值相符。

常见错误

- 比较系数时忘记了 $\frac{1}{x}$ 项。这些项确实会抵消，但全靠 $2\cot 2x$ 和 $2\operatorname{cosec} 2x$ 中的因子 2。
- 在第 (iii) 部分展开平方时，忘记了 $b_0 = b_2 = 0$。若保留 b_0，便会多出本不存在的 x 的奇数次幂，你还得另行证明它们的系数为零。
- 计算 $c_3 = -\frac{7}{8}b_3$ 时弄错正负号或 2 的幂次。留意 $2^{-3} - 1 = -\frac{7}{8}$。

STEP 之外

把这个方法推演到更高阶，就会发现这些系数原来是伯努利数（Bernoulli numbers）B_{2k}：$x\cot x = \sum_k (-1)^k 2^{2k} B_{2k}\, x^{2k}/(2k)!$。第 (i) 部分的因子 $1 - 2^{n+1}$ 随即给出 $\tan x$ 各系数的一般公式。为甚么 $\tan x$ 的级数到了 $|x| = \frac{1}{2}\pi$ 就不再收敛？复分析（complex analysis）回答了这个问题：幂级数的收敛范围一直延伸到函数趋向无穷的最近一点，对 tan 而言，就是位于 $\pm\frac{1}{2}\pi$ 的极点（pole）。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 对此有精彩的解说，而 Abbott 的 *Understanding Analysis* 则为幂级数的逐项比较提供了严格的论证。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。