详细解答

STEP III 2006，第 2 题

纯数学 · 利用对称性求定积分

STEP III 2006，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/06-s3-q2

关键思路

区间 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ 是对称的，所以把 θ 换成 $-\theta$ 便得到 I 的第二个表达式；两式相加，分母中那个碍事的 $\sin\theta$ 就会消失。一旦把所有式子都用 $\tan\theta$ 表示，积分（integral）I 和 J 便有相同的分母，而两者经适当选取的组合，其被积函数（integrand）恰好是 1。整个过程中，要时刻留意 $\cos 2\alpha$ 的正负号：最后一部分的变化正在于此。

解答

设 $s = \sin 2\alpha$ 及 $c = \cos 2\alpha$，则 $s^2 + c^2 = 1$。在所考虑的两个 α 范围内（$\alpha \neq \frac{1}{4}\pi$），都有 $0 < s < 1$，所以 $1 \mp s\sin\theta \geq 1 - s > 0$：$I$ 的被积函数在整个区间上连续（continuous）。

第 (i) 部分

作代换（substitution）$\theta = -\phi$，则 $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$，而上下限互换。由于 $\cos^2(-\phi) = \cos^2\phi$ 及 $\sin(-\phi) = -\sin\phi$，

$$I = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\phi}{1 + \sin\phi\, s}\,(-\mathrm{d}\phi) = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\phi}{1 + s\sin\phi}\,\mathrm{d}\phi,$$

这就是第一个结果（把 ϕ 改写为 θ 即可）。

把 I 的两个表达式相加，

$$2I = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2\theta \left(\frac{1}{1 - s\sin\theta} + \frac{1}{1 + s\sin\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2\cos^2\theta}{1 - s^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

现在把分子和分母同时除以 $\cos^2\theta$（在区间内部不为零）：

$$\frac{2\cos^2\theta}{1-s^2\sin^2\theta}=\frac{2}{\sec^2\theta-s^2\tan^2\theta}=\frac{2}{1+\tan^2\theta\,(1-s^2)}=\frac{2}{1+c^2\tan^2\theta},$$

其中用到 $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$ 及 $1-\sin^2 2\alpha=\cos^2 2\alpha$。因此

$$2I=\int_{-\frac12\pi}^{\frac12\pi}\frac{2}{1+\tan^2\theta\cos^2 2\alpha}\,\mathrm{d}\theta,$$

正如所求。（在 $\theta=\pm\frac12\pi$ 处，这个被积函数趋向 0，所以在两个端点不会出问题。）

第 (ii) 部分

分子中的 $\sec^2\theta$ 提示我们采用 $t=\tan\theta$，$\mathrm{d}t=\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$。当 θ 由 $-\frac12\pi$ 变到 $\frac12\pi$ 时，t 走遍整条实数线：

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+c^2t^2}.$$

由于 $0<\alpha<\frac14\pi$，我们有 $0<2\alpha<\frac12\pi$，所以 $c>0$。设 $u=ct$，

$$J=\frac1c\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\frac1c\Big[\arctan u\Big]_{-\infty}^{\infty}=\frac{\pi}{c}=\pi\sec 2\alpha.$$

第 (iii) 部分

由第 (i) 部分，$I=\displaystyle\int_{-\frac12\pi}^{\frac12\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+c^2\tan^2\theta}$，它与 J 有相同的分母。所以

$$s^2I+c^2J=\int_{-\frac12\pi}^{\frac12\pi}\frac{s^2+c^2\sec^2\theta}{1+c^2\tan^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

? **想一想** 为甚么偏偏这个组合会比较容易处理?

看看分子：$s^2+c^2\sec^2\theta=s^2+c^2+c^2\tan^2\theta=1+c^2\tan^2\theta$。它恰好就是分母，所以被积函数是 1，而

$$s^2I+c^2J=\pi.$$

利用第 (ii) 部分的 $J=\pi/c$，

$$s^2I=\pi-\pi c=\pi(1-c)\quad\Longrightarrow\quad I=\frac{\pi(1-c)}{1-c^2}=\frac{\pi}{1+c},$$

其中用到 $s^2=1-c^2=(1-c)(1+c)$，并约去了 $1-c\neq0$（因为 $c<1$）。最后，$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$，所以

$$I=\frac{\pi}{2\cos^2\alpha}=\tfrac12\pi\sec^2\alpha.\qquad\checkmark$$

第 (iv) 部分

现在 $\frac{1}{4}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$，所以 $\frac{1}{2}\pi < 2\alpha < \pi$：仍然有 $0 < s < 1$，但这次 $c < 0$。第 (i) 部分只用到 $s^2 + c^2 = 1$，所以依然成立；第 (iii) 部分的恒等式（identity）$s^2 I + c^2 J = \pi$ 亦然。唯一改变的是第 (ii) 部分。

> **想一想** 第 (ii) 部分究竟在哪里用到了 $\alpha < \frac{1}{4}\pi$?

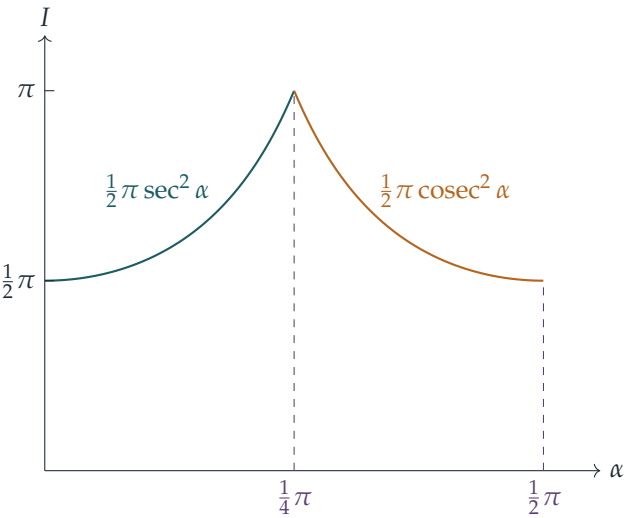
就在代换 $u = ct$ 之中：若 $c < 0$，u 的上下限会变成由 $+\infty$ 到 $-\infty$，把它们换回来便多出一个负号。换句话说，$J = \pi/|c| = -\pi/c$。（这是必然的：J 是一个正函数的积分，所以不可能等于负数 $\pi \sec 2\alpha$。）于是

$$s^2 I = \pi - c^2\Big(-\frac{\pi}{c}\Big) = \pi(1+c) \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{\pi(1+c)}{(1-c)(1+c)} = \frac{\pi}{1-c},$$

其中约去了 $1 + c \neq 0$（因为 $c > -1$）。由于 $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$，

$$I = \frac{\pi}{2\sin^2\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{cosec}^2\alpha \qquad \big(\tfrac{1}{4}\pi < \alpha < \tfrac{1}{2}\pi\big).$$

有一个快捷的方法可以核实：I 只通过 $\sin 2\alpha$ 依赖于 α，而 $\sin 2(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \sin 2\alpha$。所以 $I(\alpha) = I(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \frac{1}{2}\pi \sec^2(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \frac{1}{2}\pi \operatorname{cosec}^2\alpha$。$I$ 的图像关于 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ 对称，而两条公式在该处都给出 π：



验算

- 在 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$（$c = 0$）时，第 (i) 部分的 2I 形式的被积函数是 2，得出 $I = \pi$，与两条公式都吻合。

- 当 $\alpha \to 0$ 时，$I \to \int \cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\pi$，与 $\frac{1}{2}\pi \sec^2 0$ 吻合。
- 数值计算方面（对原来的积分使用辛普森法则（Simpson's rule）），$\alpha = 0.5$ 给出 $I \approx 2.039595$，等于 $\frac{1}{2}\pi \sec^2 0.5$；而 $\alpha = 1.1$ 给出 $I \approx 1.977709 = \frac{1}{2}\pi \operatorname{cosec}^2 1.1$。在所有测试过的情况中，$s^2 I + c^2 J$ 的结果都是 3.141593。

常见错误

- 在第 (iv) 部分仍然写 $J = \pi \sec 2\alpha$：这个值在该范围内是负数，而正函数的积分不可能是负数。
- 忘记了代换 $t = \tan\theta$ 会把有限区间变成整条实数线，所以上下限变成 $\pm\infty$。

STEP 之外

第 (i) 部分的技巧，即取 $f(\theta)$ 与 $f(-\theta)$ 的平均，正是把函数分解为偶部和奇部（even and odd parts）的起点：在对称区间上积分，只有偶部会留下来。$\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的有理函数（rational function）在一个完整周期上的积分，是大学第一门复分析（complex analysis）课程中围道积分（contour integration，即留数定理 the residue theorem）的经典应用，像本题这样的结果在那里寥寥数行便可得出；参阅 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可视化复分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。