详细解答

STEP III 2006，第 13 题

概率与统计 • 几何概率

STEP III 2006，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/06-s3-q13

关键思路

周界由两段性质迥异的部分组成：一段长度为 π 的弧和一条长度为 2 的直径，所以我们按每一点落在哪一段来取条件（condition）。在三种情况的每一种之中，三角形的面积都有简单的公式 $\frac{1}{2}ab\sin C$，其中顶点 C 位于圆心，而各个条件期望值（conditional expectation）都只是简短的积分。最后用全期望定律（law of total expectation）把各部分重新合并起来。

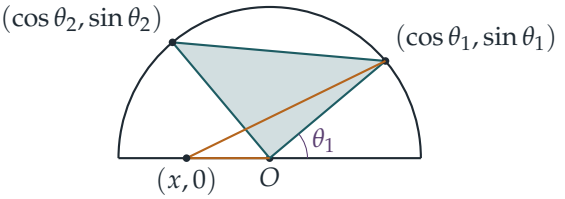
解答

设置

把直径的中点 O 放在原点，直径沿 x 轴由 $(-1,0)$ 伸展至 $(1,0)$，而弧则位于上半平面。“在周界上随机选取”的意思是沿整条边界按长度均匀分布（uniformly distributed），边界的总长度为 $\pi+2$。因此每一点各自独立地

- 以概率 $\dfrac{\pi}{\pi+2}$ 落在弧上，这时它是 $(\cos\theta,\sin\theta)$，其中 θ 在 $[0,\pi]$ 上均匀分布；
- 以概率 $\dfrac{2}{\pi+2}$ 落在直径上，这时它是 $(x,0)$，其中 x 在 $[-1,1]$ 上均匀分布。

（在弧上按长度均匀分布，等同于按角度均匀分布，因为单位圆上的弧长等于所对的角。）



设 D 为两点之中落在直径上的点的数目。那么 $D = 2$、1、0 的概率分别为

$$\frac{4}{(\pi+2)^2}, \qquad \frac{2\cdot 2\pi}{(\pi+2)^2} = \frac{4\pi}{(\pi+2)^2}, \qquad \frac{\pi^2}{(\pi+2)^2},$$

这里用到两点互相独立（independent）（中间一种情况的因子 2 是计算哪一点落在直径上）。在每一种情况下，三角形都有一个顶点在 O，所以它的面积是 $\frac{1}{2}\,|OP|\,|OQ|\sin\angle POQ$。

两点都在直径上

三个顶点全在同一直线上，所以三角形是退化（degenerate）的，$A = 0$。因此 $\mathrm{E}(A \mid D = 2) = 0$。

一点在弧上，一点在直径上

设这两点为 $P = (\cos\theta, \sin\theta)$ 和 $R = (x, 0)$。那么 $|OP| = 1$，$|OR| = |x|$，而底边 OR 沿着直径，P 则在它上方高度 $\sin\theta \geq 0$ 之处，所以

$$A = \tfrac{1}{2}\,|x|\sin\theta.$$

由于 x 与 θ 互相独立，

$$\mathrm{E}(A \mid D = 1) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}|x|\,\mathrm{E}(\sin\theta) = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|x|\,\mathrm{d}x\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2\pi}.$$

两点都在弧上

现在 $P = (\cos\theta_1, \sin\theta_1)$ 和 $Q = (\cos\theta_2, \sin\theta_2)$，其中 θ_1, θ_2 互相独立，并在 $[0, \pi]$ 上均匀分布。两条半径的长度都是 1，而角 POQ 等于 $|\theta_1 - \theta_2|$，所以

$$A = \tfrac{1}{2}\,|\sin(\theta_1 - \theta_2)|.$$

? **想一想** 要求出 $\mathrm{E}|\sin(\theta_1 - \theta_2)|$，我们是否需要知道 $\theta_1 - \theta_2$ 的分布？

不需要：先对 θ_2 取条件。对于固定的 θ_2，当 θ_1 走遍 $[0, \pi]$ 时，角 $\theta_1 - \theta_2$ 走遍一个长度为 π 的区间。函数 $|\sin u|$ 的周期（period）为 π，所以它在任何长度为 π 的区间上的积

分，都与在 $[0,\pi]$ 上的积分相同：

$$\int_0^{\pi} |\sin(\theta_1-\theta_2)|\,\mathrm{d}\theta_1 = \int_0^{\pi} \sin u\,\mathrm{d}u = 2.$$

所以无论 θ_2 是甚么，都有 $\mathrm{E}\big(|\sin(\theta_1-\theta_2)| \,\big|\, \theta_2\big) = 2/\pi$，因此

$$\mathrm{E}(A \mid D=0) = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi}.$$

合并结果

根据全期望定律，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(A) &= \frac{4}{(\pi+2)^2}\cdot 0 + \frac{4\pi}{(\pi+2)^2}\cdot\frac{1}{2\pi} + \frac{\pi^2}{(\pi+2)^2}\cdot\frac{1}{\pi}\\ &= \frac{2+\pi}{(\pi+2)^2} = \frac{1}{2+\pi},\end{aligned}$$

这就是 $(2+\pi)^{-1}$，正如题目所求。

验算

- 三种情况的概率之和 $\dfrac{4+4\pi+\pi^2}{(\pi+2)^2}$ 等于 1。
- 每个条件期望值都不超过该情况下可能出现的最大面积：$\frac{1}{\pi}\approx 0.318 \le \frac{1}{2}$（两条半径互相垂直）以及 $\frac{1}{2\pi}\approx 0.159 \le \frac{1}{2}$。
- 用 10^6 对点进行蒙地卡罗模拟（Monte Carlo simulation），得出 $\mathrm{E}(A)\approx 0.1943$，而 $1/(2+\pi)\approx 0.1945$；数值积分（quadrature）亦证实了条件期望值 $1/\pi$ 和 $1/(2\pi)$。

常见错误

- 以各 $\frac{1}{2}$ 的概率选择每一点落在弧上或直径上。“在周界上随机选取”是按每一段的长度来加权的。
- 在 $\mathrm{P}(D=1)$ 中漏掉因子 2：两点中任何一点都可以是落在直径上的那一点。
- 写成 $A=\frac{1}{2}\sin(\theta_1-\theta_2)$ 而漏掉绝对值（modulus），这样由对称性得出的期望值会是 0。

STEP 之外

这是几何概率（geometric probability）的一个小例子，这门学问的经典例子包括蒲丰投针问题（Buffon's needle）和贝特朗悖论（Bertrand's paradox）。贝特朗悖论说明了为何“随机”一词必须界定清楚，正如我们以沿周界的长度作为测度（measure）那样。这里真正发挥作用的工具，即对一个划分（partition）取条件然后求平均（全期望定律），是大学一年级概率论的核心内容。Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教材）对此有很好的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。