详细解答

STEP III 2006，第 12 题

概率与统计 · 正态近似与期望值

> **STEP III 2006，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q12

关键思路

多加一辆巴士，其价值只在于它平均能赚到的钱，所以公司应考虑的牌照费，最多只能是每年额外利润的*期望值*（expected value）。在现有车队已足以应付的日子，新增的巴士一分钱也赚不到；而它载客再多，也不会超过车上的 32 个座位。因此我们要求的，是一个“被截断”的随机变量（random variable）的期望值。题目的数字经过刻意挑选：在正态近似（normal approximation）之下，新旧载客量刚好落在分布上非常整齐的位置。

解答

建立模型

考虑单独一次抵达，设 X 为 1024 名游客中被指示前往巴士站的人数。每名游客前往巴士站的概率为 $\frac{1}{2}$，并假设各游客获得的指示彼此独立（independent）。于是

$$X \sim \mathrm{B}(1024, \tfrac{1}{2}), \qquad \mathrm{E}(X) = 512, \qquad \mathrm{Var}(X) = 1024 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = 256.$$

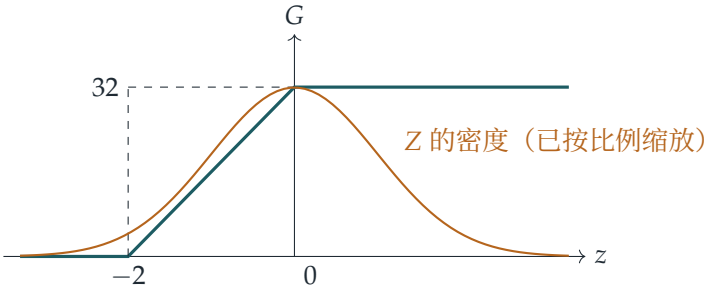
由于 n 很大而 $p = \frac{1}{2}$，我们采用正态近似 $X \approx \mathrm{N}(512, 16^2)$，并写成 $X = 512 + 16Z$，其中 $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$。按题目指示，我们不作连续性校正（continuity correction）。

15 辆巴士可载 $15 \times 32 = 480$ 名乘客，所以现时每次抵达的利润是 $\pounds \min(X, 480)$。加上第 16 辆巴士后，载客量是 512，利润是 $\pounds \min(X, 512)$。因此每次抵达的额外利润是

$$G = \min(X,512) - \min(X,480) = \begin{cases} 0, & X \le 480, \\ X - 480, & 480 \le X \le 512, \\ 32, & X \ge 512. \end{cases}$$

以 Z 表示，两个分界点分别是 $X = 480 \iff Z = -2$ 和 $X = 512 \iff Z = 0$，而在中间的范围内 $X - 480 = 32 + 16Z$。所以

$$G = \begin{cases} 0, & Z \le -2, \\ 32 + 16Z, & -2 \le Z \le 0, \\ 32, & Z \ge 0. \end{cases}$$



额外利润的期望值

设 $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$ 为标准正态密度函数（standard normal density）。把期望值按三个范围拆开，得

$$\mathrm{E}(G) = 32\,\mathrm{P}(Z \ge 0) + \int_{-2}^{0} (32 + 16z)\,\phi(z)\,\mathrm{d}z.$$

第一项是 $32 \times \frac{1}{2} = 16$。至于积分，常数部分给出

$$32 \int_{-2}^{0} \phi(z)\,\mathrm{d}z = 32(\Phi(0) - \Phi(-2)) = 32(\tfrac{1}{2} - (1 - \Phi(2))) = 32\Phi(2) - 16,$$

其中用到了对称性 $\Phi(-2) = 1 - \Phi(2)$。

> ? **想一想** 没有数表，怎样求 $z\,\phi(z)$ 的积分？

对密度函数求导：$\phi'(z) = -z\,\phi(z)$。所以 $z\,\phi(z)$ 有精确的原函数（antiderivative）$-\phi(z)$，于是

$$16 \int_{-2}^{0} z\,\phi(z)\,\mathrm{d}z = 16[-\phi(z)]_{-2}^{0} = -16(\phi(0) - \phi(2)) = -\frac{16}{\sqrt{2\pi}}(1 - e^{-2}).$$

（结果是负数，这正合道理：在整个范围内 $z < 0$。）

把三部分相加，两个 16 互相抵消：

$$\mathrm{E}(G) = 16 + (32\Phi(2) - 16) - \frac{16}{\sqrt{2\pi}}(1 - e^{-2}) = 32\Phi(2) - \frac{16}{\sqrt{2\pi}}(1 - e^{-2}).$$

牌照费

每年有 50 次抵达，所以根据期望值的线性性质（linearity of expectation），第 16 辆巴士每年带来的额外利润期望值是

$$50\,\mathrm{E}(G) = 1600\,\Phi(2) - \frac{800}{\sqrt{2\pi}}(1 - \mathrm{e}^{-2}) \text{ 英镑.}$$

若所付的牌照费高于此数，公司平均而言会亏本；而任何较低的费用都会留下期望收益。所以这就是值得考虑的最高年费（只是近似值，因为用了正态近似），亦即所求的结果。其数值约为 £1288。

验算

- 合理范围：新增的巴士每程赚取的金额介乎 0 与 32 之间，所以全年的数字必定介乎 0 与 1600 之间。我们的数值 $1600 \times 0.97725 - 319.15 \times 0.86466 \approx 1287.6$ 确实如此。
- 精确计算：以精确的 $\mathrm{B}(1024, \frac{1}{2})$ 概率对 $\min(k, 512) - \min(k, 480)$ 求和，再乘以 50，得 1287.69，与正态近似所得的 1287.64 相差不超过 6 便士。

常见错误

- 把额外利润当作 $32\,\mathrm{P}(X > 480)$，仿佛只要用得着新巴士，它就一定满座。其实在巴士乘客人数介乎 480 与 512 之间的日子，它只坐满了一部分。
- 计算 $\int_{-2}^{0} z\phi(z)\,\mathrm{d}z$ 时弄错正负号：被积函数是负的，所以答案必定是负数。

STEP 之外

$\mathrm{E}\big(\min(X, c)\big)$ 这个量，就是存货为 c 的报贩的期望销量；而如何选择 c 的“报贩问题”（newsvendor problem），是运筹学（operations research）的经典课题。同样的截断收益 $\min(\max(X - a, 0), b - a)$，在金融数学中称为“看涨期权价差”（call spread）。$\phi'(z) = -z\phi(z)$ 这个技巧，是截断正态分布的矩（truncated normal moments）理论的起点。Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）涵盖了二项分布（binomial distribution）的正态近似，以及随机变量函数的期望值。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。