详细解答

STEP III 2006，第 11 题

力学 · 连接系统中的碰撞

> **STEP III 2006，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q11

关键思路

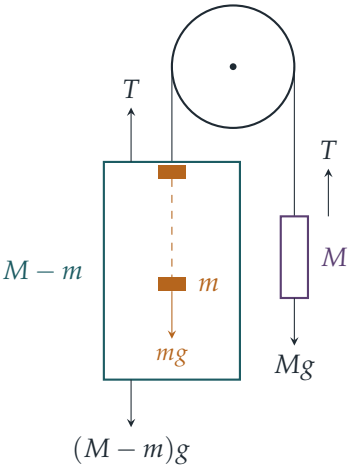
瓷砖一旦松脱，升降机便比平衡锤轻，于是升降机开始上升，而瓷砖则下坠：瓷砖要走过的，是相对于升降机的高度 h。至于碰撞，升降机与平衡锤可视为一个质量为 $2M - m$ 的单一物体，经地板与瓷砖相连；题目对缆索冲量所给的条件，正好让我们为这个物体和瓷砖写出一条动量式的守恒定律。这个“动量”在碰撞前一刻原来刚好是零，令能量的计算变得十分简洁。

解答

我们把升降机、平衡锤和瓷砖都当作质点（particle）处理（只考虑垂直方向的运动），缆索为轻而不可伸长（light and inextensible），滑轮为光滑（smooth）。瓷砖脱落之前，系统处于静止状态，所以连同瓷砖的升降机与平衡锤互相平衡：升降机连瓷砖的质量为 M，不连瓷砖则为 $M - m$。

下坠

对升降机和瓷砖，取向上为正。由于缆索不可伸长，当升降机以速率 u、加速度 a 向上运动时，平衡锤便以相同的速率和加速度向下运动。设张力（tension）为 T。



对升降机（向上）和平衡锤（向下）应用牛顿第二定律（Newton's second law），得

$$(M-m)a = T-(M-m)g, \qquad Ma = Mg - T.$$

两式相加，得 $(2M-m)a = mg$，所以

$$a = \frac{mg}{2M-m}.$$

瓷砖作自由落体运动（free fall），加速度为向下的 g（导轨光滑，亦没有其他东西碰到它）。因此，相对于升降机，瓷砖向下的加速度为

$$g + a = g + \frac{mg}{2M-m} = \frac{2Mg}{2M-m},$$

而它相对于升降机是由静止开始运动的。设它经过时间 t 后碰到地板，则 $\frac{1}{2}(g+a)t^2 = h$，所以

$$t^2 = \frac{(2M-m)h}{Mg}.$$

在那一刻，瓷砖的速率为

$$v = gt = \sqrt{g^2 \cdot \frac{(2M-m)h}{Mg}} = \sqrt{\frac{(2M-m)gh}{M}},$$

正如题目所求。此时升降机（和平衡锤）的速率为

$$U = at = \frac{m}{2M-m}\,gt = \frac{mv}{2M-m}.$$

在这段时间内，升降机上升了 $\frac{1}{2}at^2 = \frac{mh}{2M} < h$，所以题目对升降机与滑轮距离所设的条件，保证了升降机不会先碰到滑轮。

碰撞

设 J 为地板作用于瓷砖的冲量（impulse）（向上），又设 I 为缆索张力的冲量；根据题目所给的条件，这个冲量作用于升降机和作用于平衡锤的大小相同（两者都是向上）。碰撞在瞬间完成，重力在此期间不产生冲量。设碰撞后一刻瓷砖的速度为 w（向上），升降机的速度为 U'（向上），则平衡锤向下的速度同样是 U'。于是：

$$\begin{aligned} \text{瓷砖：} \quad & m\big(w-(-v)\big) = J, \\ \text{升降机：} \quad & (M-m)(U'-U) = I - J, \\ \text{平衡锤（向下）：} \quad & M(U'-U) = -I. \end{aligned}$$

三式相加，便消去 J 和 I：

$$mw + (2M-m)U' = -mv + (2M-m)U.$$

想一想 平衡锤的方程以“向下”为正，为甚么可以把它与另外两条方程相加?

因为有缆索相连，“平衡锤向下”与“升降机向上”其实是同一个坐标。我们所证明的是：$mw + (2M-m)U'$ 这个组合（瓷砖向上的动量，加上升降机与平衡锤沿缆索方向量度的动量）在碰撞前后保持不变。冲量相等这个条件正是用在这里：没有它，I 便不会抵消。

现在是关键的观察：由于 $U = \dfrac{mv}{2M-m}$，右边等于 $-mv + mv = 0$。所以

$$mw + (2M-m)U' = 0 = -mv + (2M-m)U.$$

在地板处应用牛顿实验定律（Newton's experimental law）：分离速率等于接近速率的 e 倍，即

$$w - U' = e\big(U - (-v)\big) = e(U+v).$$

碰撞前和碰撞后的速度都满足同一条“零动量”方程，所以 (w, U') 和 $(-v, U)$ 这两对数各自都是 $(2M-m,\ -m)$ 的倍数。恢复方程随即决定了这个倍数：$w = ev$ 及 $U' = -eU$。（验算：$mev - (2M-m)eU = e(mv - mv) = 0$，且 $w - U' = e(v+U)$。）

能量损失

碰撞前一刻，动能（kinetic energy）为

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}(2M-m)U^2 = \tfrac{1}{2}mv^2\left(1 + \frac{m}{2M-m}\right) = \frac{Mmv^2}{2M-m} = mgh,$$

其中先用了 $U = \frac{mv}{2M-m}$，再用了 $v^2 = \frac{(2M-m)gh}{M}$。碰撞后一刻，每个速度都乘上了 $\pm e$，所以动能为 $e^2\,mgh$。碰撞在瞬间完成，期间势能（potential energy）不变，因此系统的能量损失为

$$mgh - e^2 mgh = mgh(1-e^2),$$

正如题目所求。

评注

答案完全与 M 无关：它正好等于瓷砖在一部固定不动的升降机内下坠高度 h、再以恢复系数（coefficient of restitution）e 反弹时的能量损失。这是合理的。碰撞前一刻，系统的动能为 mgh，这正是所释放的势能（瓷砖与升降机之间的距离缩短了 h，而升降机上升的高度恰好被平衡锤下降的高度抵消）。又因为沿缆索方向的“动量”为零，这次碰撞就如同在零动量参考系（zero-momentum frame）中观察的碰撞，而在这个参考系中，损失的动能所占的比例永远是 $1-e^2$。特别地，若 $e=0$，全部动能都会损失，整个系统静止下来；若 $e=1$，则毫无损失。

验算

- 取 $M=5$、$m=2$、$h=3$、$g=10$、$e=\frac{1}{3}$。则 $v^2=48$ 及 $U^2=3$，所以碰撞前的动能为 $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 48+\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3=60=mgh$，而损失为 $60\cdot\frac{8}{9}=\frac{160}{3}$。
- 以数值方法逐步模拟这个运动（瓷砖自由下坠，升降机以 $\frac{mg}{2M-m}$ 向上加速），随机选取 200 组 M、m、h、e 的值，所得的碰撞速率 v、升降机速率 U 和能量损失 $mgh(1-e^2)$ 均与上述结果吻合。
- 当 $m\to 0$ 时，升降机几乎不动，而 $v\to\sqrt{2gh}$，即自由落体的速率，与预期相符。
- 张力的冲量 $I=M(U-U')=M(1+e)U$ 为正数，所以缆索在碰撞期间保持拉紧。

常见错误

- 瓷砖脱落之后，仍把升降机的质量当作 M。这样的话，甚么都不会加速，瓷砖的速率便会是 $\sqrt{2gh}$。
- 忘记地板会上升迎向瓷砖，所以瓷砖相对于地面下坠的距离小于 h。
- 只对瓷砖和升降机应用动量守恒（conservation of momentum），忘记了经缆索与升降机相连的平衡锤。

STEP 之外

碰撞中守恒的量并不是普通的动量，而是与描述缆索位置的那个单一坐标共轭的动量：这是初尝广义坐标（generalised coordinates）和拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）的滋味。总动量为零的碰撞恰好损失动能的 $1-e^2$ 这个比例，这个事实正是贯穿整个碰撞理论的质心参考系（centre-of-mass frame）思想。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）对质心参考系中的动量和连结体系统都有细致的论

述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。