详细解答

STEP III 2006，第 10 题

力学 · 角动量守恒

> **STEP III 2006，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q10

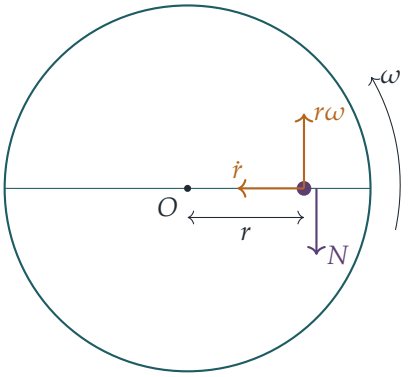
关键思路

没有任何外来作用令圆盘与质点组成的系统绕轴转动，而光滑凹槽所作的净功为零，所以有两条守恒定律：绕轴的角动量（angular momentum）守恒和动能（kinetic energy）守恒。由此可得 ω 和 $\dot{r}$ 均为只含 r 的函数，而那个把 V、Ω、a 和 k 连系起来、看似古怪的条件，正是为了令能量的表达式大幅化简。把 $\dot{r}$ 除以 $\dot{\theta} = \omega$ 便可消去时间，剩下一条描述路径的可分离变量（separable）方程。

解答

模型

我们把质点视为质量为 m 的点质量，并把凹槽视为光滑，所以质点所受的唯一水平力是垂直于凹槽的反作用力（reaction）N。圆盘绕固定的铅垂轴自由转动，所以轴承对该轴不施加力矩（torque）。重力和铅垂方向的反作用力都是铅垂的，不起任何作用。设 θ 为圆盘已转过的角度，故 $\omega = \dot{\theta}$，并设 r 为质点与轴的距离。由于质点一直留在凹槽内，它的速度有一个沿凹槽的分量 $\dot{r}$ 和一个垂直于凹槽的分量 $r\omega$。



角速率

反作用力 N 作用于质点，而 $-N$ 则作用于圆盘上的同一点，所以两者绕轴的力矩互相抵销。既然没有绕轴的外力矩，绕轴的总角动量便是常数。圆盘的贡献是 $mk^2\omega$，质点的贡献是 $mr\cdot r\omega = mr^2\omega$（只有其速度的横向分量才有矩）。在 $t=0$ 时，总角动量为 $m(k^2+a^2)\Omega$，所以

$$(k^2+r^2)\,\omega = (k^2+a^2)\,\Omega, \qquad \text{即} \qquad \omega = \frac{\Omega(k^2+a^2)}{k^2+r^2},$$

这就是第一个结果。

径向速率

> **想一想** 质点运动时，凹槽从侧面推着它。为甚么能量仍然守恒?

反作用力 N 垂直于凹槽。质点与圆盘上跟它接触的那一点，在垂直于凹槽方向上的速度分量相同，都是 $r\omega$；两者的差别只在于沿凹槽的滑动速度 $\dot r$，而这个速度垂直于 N。所以 N 对质点所作的功，恰好被 $-N$ 对圆盘所作的功抵销。轴上的轴承不作功，所以总动能是常数。

约去公因子 $\frac12 m$ 后，能量守恒给出

$$k^2\omega^2 + \dot r^2 + r^2\omega^2 = k^2\Omega^2 + V^2 + a^2\Omega^2.$$

现在把题目所给的条件 $V^2 = \Omega^2a^2(k^2+a^2)/k^2$ 用于右边：

$$(k^2+a^2)\Omega^2 + \frac{\Omega^2a^2(k^2+a^2)}{k^2} = \frac{\Omega^2(k^2+a^2)(k^2+a^2)}{k^2} = \frac{\Omega^2(k^2+a^2)^2}{k^2}.$$

至于左边，由第一个结果可得 $(k^2+r^2)\omega^2 = \Omega^2(k^2+a^2)^2/(k^2+r^2)$。因此

$$\begin{aligned}\dot{r}^2 &= \Omega^2(k^2+a^2)^2\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2+r^2}\right)\\ &= \frac{\Omega^2 r^2(k^2+a^2)^2}{k^2(k^2+r^2)},\end{aligned}$$

正是所求。

路径的方程

质点向轴运动时，$\dot{r}<0$，所以取负平方根，

$$\dot{r} = -\frac{\Omega r(k^2+a^2)}{k\sqrt{k^2+r^2}}.$$

由于 $\omega = \dot{\theta} > 0$，我们可以使用链式法则（chain rule），$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \dot{r}\Big/\dot{\theta} = \dot{r}/\omega$：

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{\Omega r(k^2+a^2)}{k\sqrt{k^2+r^2}}\cdot\frac{k^2+r^2}{\Omega(k^2+a^2)} = -\frac{r\sqrt{k^2+r^2}}{k},$$

所以 $k\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -r(k^2+r^2)^{1/2}$，正是所求。

求解 r

设 $u = k/r$，故 $u>0$。于是

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{k}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{k}{r^2}\cdot\frac{r\sqrt{k^2+r^2}}{k} = \sqrt{\frac{k^2}{r^2}+1} = \sqrt{1+u^2}.$$

这条方程可分离变量：

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = \int\mathrm{d}\theta \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{arsinh}u = \theta+\alpha$$

其中 α 为某个常数。所以 $k/r = \sinh(\theta+\alpha)$，即

$$r\sinh(\theta+\alpha) = k.$$

在 $t=0$ 时，$\theta=0$ 而 $r=a$，所以 $\sinh\alpha = k/a$，正是所求。

质点永远不会到达轴

? **想一想** $r = k/\sinh(\theta+\alpha)$ 永不为零，但 θ 会否在有限时间内变成无穷大?

不会。由于 $r^2 \geq 0$，第一个结果给出 $\omega \leq \Omega(k^2+a^2)/k^2$，所以 $\theta \leq \Omega(k^2+a^2)t/k^2$ 在每一个有限的时刻 t 都是有限的。于是在任何时刻都有 $r = k/\sinh(\theta+\alpha) > 0$。

我们还应检查这些公式是否一直成立，即质点是否一直向轴运动。根据 $\dot{r}^2$ 的公式，$\dot{r}$ 只有在 $r = 0$ 时才可能等于零。所以只要 $r > 0$，$\dot{r}$ 便保持最初的负号，而上述论证对所有 $t > 0$ 都适用。质点沿螺旋线不断向轴靠近，只有当 $\theta \to \infty$ 时才有 $r \to 0$，但它永远不会到达轴。

验算

- 在 $r = a$ 时，$\dot{r}^2$ 的公式给出 $\Omega^2 a^2(k^2+a^2)/k^2 = V^2$，与初始条件吻合。
- 取 $k = a = \Omega = 1$（故 $V = \sqrt{2}$），我们以数值方法对运动方程 $\ddot{r} = r\omega^2$ 和 $(k^2+r^2)\omega =$ 常数作积分。当圆盘转过 $\theta \approx 4.4170$ 后，质点到达 $r = 0.01$，而 $\operatorname{arsinh} 100 - \operatorname{arsinh} 1 \approx 5.2983 - 0.8814 = 4.4169$ 与此相符。在整个计算过程中，能量、$\dot{r}^2$ 和 $r\sinh(\theta+\alpha) = k$ 全都成立，误差约为 10^{-11}。

常见错误

- 忘记质点本身的角动量 $mr^2\omega$，或它的横向动能 $\frac{1}{2}mr^2\omega^2$。
- 对 $\dot{r}$ 取正平方根，令 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ 的正负号出错。
- 单凭 $r \neq 0$ 便断定“永远不会到达轴”，而没有指出 θ 在有限时间内保持有限。

STEP 之外

质点不受任何径向力，但在圆盘的旋转参考系（rotating frame）中，它却似乎被向外推。这就是 $\ddot{r} = r\omega^2$ 中的离心（centrifugal）项，而侧向的反作用力 N 则与科里奥利力（Coriolis force）平衡。大学力学会用拉格朗日（Lagrange）方法处理这类问题：角度 θ 不出现在能量之中，所以它的共轭动量（conjugate momentum），在这里即角动量，便自动守恒。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）以恰当的程度讲解旋转参考系和角动量。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。