详细解答

STEP III 2006，第 1 题

纯数学 · 曲线描绘

STEP III 2006，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/06-s3-q1

关键思路

先做除法：把曲线写成一条直线加上一个细小的修正项，便可得出斜渐近线（oblique asymptote），知道曲线位于渐近线的哪一侧，而且求导数（derivative）也变得容易。结果导数处处大于 2，而单凭这一个事实，便足以完成数根部分的大半工作：每条方程都可以改写成“曲线 = 某个简单的式子”，然后比较斜率。

解答

曲线

由于 $2x^3 - 10x = 2x(x^2 - 4) - 2x$，

$$y = \frac{2x(x^2-5)}{x^2-4} = 2x - \frac{2x}{x^2-4}.$$

有些特征可以即时看出：

- y 是奇函数（odd function），所以曲线关于原点有 2 重旋转对称（rotational symmetry）。
- 曲线在 $x = 0$ 和 $x = \pm\sqrt{5}$ 处与 x 轴相交。
- **渐近线**。分母在 $x = \pm 2$ 处为零（该处分子为 $\pm 4 \cdot (-1) \cdot 2 \neq 0$），所以 $x = 2$ 和 $x = -2$ 是铅垂渐近线（vertical asymptote）。当 $|x| \to \infty$ 时，修正项 $2x/(x^2-4) \to 0$，所以 $y = 2x$ 是斜渐近线。
- **在渐近线的哪一侧**。$y - 2x = -2x/(x^2-4)$。当 $x > 2$ 时，此式为负（曲线略低于 $y = 2x$）；当 $x < -2$ 时为正（略高于它）。当 $0 < x < 2$ 时为正，当 $-2 < x < 0$ 时为负。

- **在 $x = \pm 2$ 附近的表现**。当 $x \to 2^+$ 时，$-2x/(x^2-4) \to -\infty$，而当 $x \to 2^-$ 时它趋向 $+\infty$；由奇函数的性质，当 $x \to -2^-$ 时 $y \to +\infty$，当 $x \to -2^+$ 时 $y \to -\infty$。

对除法后的形式求导，

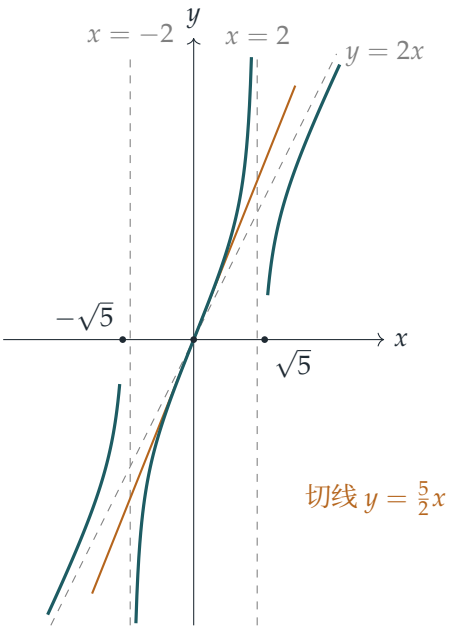
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2 - \frac{2(x^2-4) - 2x \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = 2 + \frac{2(x^2+4)}{(x^2-4)^2}.$$

所以对任何 $x \neq \pm 2$ 都有 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x > 2$：曲线没有驻点（stationary point），而且在 $x < -2$、$-2 < x < 2$、$x > 2$ 这三个区间的每一个上，曲线都严格递增（strictly increasing），由 $-\infty$ 升至 $+\infty$。

原点处的切线（tangent）。在 $x = 0$ 处斜率为 $2 + 8/16 = \frac{5}{2}$，所以切线是 $y = \frac{5}{2}x$。再求导一次，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{4x(x^2+12)}{(x^2-4)^3},$$

它只在 $x = 0$ 处为零，并且在该处变号：原点是拐点（point of inflection）。在 $0 < x < 2$ 上二阶导数（second derivative）为正（分子和分母皆为负），所以中间的分支在该处是凸（convex）的，位于其切线 $y = \frac{5}{2}x$ 的上方；在 $-2 < x < 0$ 上它是凹（concave）的，位于切线的下方。



小结。渐近线为 $x = 2$、$x = -2$ 和 $y = 2x$；原点处的切线为 $y = \frac{5}{2}x$。

在以下每一部分中，$x = \pm 2$ 都不会是根（该处左方不为零而右方为零），所以我们可以除以 $x^2 - 4$，然后数算曲线与另一个图像的交点。

第 (i) 部分

除以 $\frac{3}{2}(x^2-4)$，方程变成

$$\frac{2x(x^2-5)}{x^2-4} = \frac{2}{3}(x+3),$$

所以我们要找曲线与直线 $y = \frac{2}{3}x + 2$ 的交点，该直线的斜率为 $\frac{2}{3}$。

> **想一想** 为甚么斜率小于 2 的直线与每个分支都恰好相交一次?

设 $h(x)$ 为曲线的 y 值减去直线的对应值。在每个分支上 $h'(x) > 2 - \frac{2}{3} > 0$，所以 h 严格递增，最多只有一个零点。在靠近铅垂渐近线的两端，$h \to \pm\infty$，与 y 的情况一样（直线保持有限）。在外侧的两端，$h \approx 2x - \frac{2}{3}x = \frac{4}{3}x$，当 $x \to -\infty$ 时趋向 $-\infty$，当 $x \to +\infty$ 时趋向 $+\infty$。所以在三个分支的每一个上，h 都由 $-\infty$ 走到 $+\infty$，根据中间值定理（intermediate value theorem），它恰好有一个零点。

因此方程 (i) 有三个实根。（事实上它就是三次方程 $2x^3 - 3x^2 - 11x + 12 = 0$，其中一个根是 $x = 1$。）

第 (ii) 部分

除以 $2(x^2-4)$，我们需要找曲线与 $y = \frac{5}{2}x - 1$ 的交点：这是把原点处的切线向下平移 1。它的斜率现在大于 2，所以 (i) 的论证不再适用，我们要逐个分支考察。

- $x > 2$：曲线位于 $y = 2x$ 的下方，而直线满足 $\frac{5}{2}x - 1 - 2x = \frac{1}{2}x - 1 > 0$，所以它位于 $y = 2x$ 的上方。没有交点。
- $x < -2$：曲线位于 $y = 2x$ 的上方，而由于 $\frac{1}{2}x - 1 < 0$，直线位于其下方。没有交点。
- $0 \le x < 2$：曲线位于其切线 $y = \frac{5}{2}x$ 之上或恰在其上（凸性），而切线又在直线的上方。没有交点。
- $-2 < x < 0$：当 $x \to -2^+$ 时，曲线趋向 $-\infty$，而直线趋向 -6；在 $x = 0$ 处曲线的值为 0，高于直线的 -1。所以至少有一个交点。因为这里 $y'' < 0$，y' 在 $(-2, 0)$ 上递减，所以 $y' > y'(0) = \frac{5}{2}$；“曲线减直线”这个差严格递增，故交点唯一。

因此方程 (ii) 恰好有一个实根，位于 -2 与 0 之间。（写成三次方程就是 $x^3 - 2x^2 + 8 = 0$，它的驻点值 8 和 $\frac{184}{27}$ 都是正数，由此确认只有一个实根，约在 $x \approx -1.51$ 附近。）

第 (iii) 部分

除以 $(x^2-4)^2$ 得

$$\left(\frac{2x(x^2-5)}{x^2-4}\right)^2 = x^2 + 1,$$

所以我们需要找曲线与等轴双曲线（rectangular hyperbola）$y^2 - x^2 = 1$ 的交点，即与 $y = \sqrt{x^2+1}$（上支）或 $y = -\sqrt{x^2+1}$（下支）的交点。

> ? **想一想** 可以利用对称性把工作减半吗?

可以。映射 $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ 把曲线映回自身（因为它是奇函数），并把双曲线的两支互换。所以曲线与下支的交点和它与上支的交点一一对应，我们只需数算后者。

设 $u(x) = \sqrt{x^2+1}$。那么 $|u'(x)| = |x|/\sqrt{x^2+1} < 1$，所以在曲线的每个分支上，差 $y - u$ 的导数都大于 $2 - 1 = 1 > 0$，每个分支最多给出一个交点。现在检查各端：

- $-2 < x < 2$：$y - u$ 由 $-\infty$ 走到 $+\infty$。一个根。
- $x > 2$：当 $x \to 2^+$ 时 $y - u \to -\infty$，而当 $x \to \infty$ 时 $y - u \approx 2x - x \to +\infty$。一个根。
- $x < -2$：当 $x \to -\infty$ 时 $y - u \approx 2x - |x| = 3x \to -\infty$，而当 $x \to -2^-$ 时 $y - u \to +\infty$。一个根。

所以曲线与上支相交三次，而根据对称性，与下支也相交三次。两支没有公共点（$u \geq 1$），所以这六个点有六个不同的 x 值，方程 (iii) 有**六**个实根。由于它是一条 6 次多项式方程（即 $3x^6 - 33x^4 + 92x^2 - 16 = 0$），它的所有根都是实数。

验算

- 在 $x = 0$ 附近，$y \approx 2x(-5)/(-4) = \frac{5}{2}x$，与切线吻合。
- 在 $x = 1000$ 处，$y - 2x \approx -0.002$：数值细小而且为负，与预期相符。
- 对原来的方程以数值方法搜索变号位置，可找到 (i) 的根 $x \approx -2.212,\ 1,\ 2.713$；(ii) 只有 $x \approx -1.510$；而 (iii) 的根为 $x \approx \pm 0.431,\ \pm 2.155,\ \pm 2.484$。

常见错误

- 在除以 $x^2 - 4$ 之前，忘记检查 $x = \pm 2$ 不是根。
- 在 (iii) 中，只数算与 $y = \sqrt{x^2+1}$ 的交点，遗漏了负平方根。
- 在 (ii) 中，像 (i) 那样假设“直线够斜，所以每个分支一个根”：当斜率大于 2 时，外侧的分支需要另作论证。

STEP 之外

这里的数根方法，是中间值定理与单调性（monotonicity）的结合：一个连续、严格递增而且由 $-\infty$ 走到 $+\infty$ 的函数，恰好有一个零点。在大学一年级的分析课程中，这两个事实都会从实数的完备性（completeness）出发严格证明，而同样的推理也是“每个奇数次实系数多项式都有一个实根”这类结果的基础。Abbott 的 *Understanding Analysis* 对此有非常精彩的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。