详细解答

STEP II 2006，第 9 题

力学 · 摩擦力与倾倒

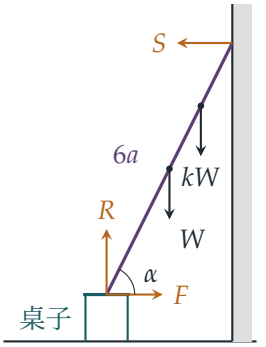
> **STEP II 2006，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q9

关键思路

把梯子和桌子视为两个独立的物体，两者靠梯脚处的接触连系起来。单看梯子，便可求出梯脚处的反作用力和摩擦力，而这两个力取决于油漆工站得多高。然后根据牛顿第三定律（Newton's third law），同样的力以相反方向作用于桌子。对于桌子，我们比较两个临界值：一个是令桌子滑动的推力，另一个是对远端桌脚的力矩（moment）大于桌上重量的力矩的推力。

解答

我们把梯子模拟为均匀杆（uniform rod），油漆工模拟为质点（particle），墙壁视为光滑（smooth），桌子则视为刚体（rigid body），桌面高度为 a（忽略桌面的厚度）。设 $\alpha = \arctan 2$，则 $\tan\alpha = 2$、$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 及 $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$。设油漆工站在沿梯子距梯脚 x 之处，其中 $0 \le x \le 6a$。



第 (i) 部分

作用于梯子的力有：作用于梯子中点的重量 W、油漆工的重量 kW、光滑墙壁给予的水平反作用力 S，以及梯脚处向上的法向反作用力（normal reaction）R 和指向墙壁的摩擦力（friction）F。（摩擦力必须指向墙壁，因为它是唯一能与 S 平衡的水平力。）

沿铅垂和水平方向分解力，得

$$R = (k+1)W, \qquad F = S.$$

对梯脚取力矩：梯顶比梯脚高 $6a\sin\alpha$，而两个重量的作用线与梯脚的水平距离分别为 $3a\cos\alpha$ 和 $x\cos\alpha$，所以

$$S \cdot 6a\sin\alpha = W \cdot 3a\cos\alpha + kW \cdot x\cos\alpha.$$

两边除以 $6a\sin\alpha$，并利用 $\cot\alpha = \frac{1}{2}$，得

$$F = S = \frac{W}{12}\Big(3 + \frac{kx}{a}\Big).$$

此式随 x 递增，所以当油漆工站在梯子最顶端，即 $x = 6a$ 时，所需的摩擦力最大：

$$F_{\max} = \frac{(3+6k)W}{12} = \frac{(2k+1)W}{4}.$$

可提供的最大摩擦力为

$$\tfrac{1}{2}R = \frac{(k+1)W}{2} = \frac{(2k+2)W}{4}.$$

由于 $2k+1 < 2k+2$，无论油漆工站在哪个位置，也无论 k 取何值，都有 $F \le F_{\max} < \frac{1}{2}R$。因此，在桌子固定的情况下，不论油漆工站得多高，梯子都不会滑动，这正是所要证明的。

第 (ii) 部分

现在 $k = 9$，所以 $R = 10W$，而

$$F = \frac{W}{4}\Big(1 + \frac{3x}{a}\Big),$$

它由 $x = 0$ 时的 $\frac{1}{4}W$ 增至 $x = 6a$ 时的 $\frac{19}{4}W$。第 (i) 部分的结论仍然适用，所以梯子不会在桌面上滑动。

根据牛顿第三定律，梯子在桌面中心对桌面施力：一个向下的力 $R = 10W$，以及一个背离墙壁的水平力 F。桌子本身的重量 $2W$ 亦作用于其中心，而地面则以法向反作用力和摩擦力作用于各桌脚。

? **想一想** 作用于桌面中心的水平推力，怎样能令桌子倾侧?

推力 F 作用于高度 a 处，所以它对离墙最远的两条桌脚的底部有力矩。如果桌子倾侧，它会绕着连接这两条桌脚底部的直线转动。各桌脚位于边长为 $\frac{1}{2}a$ 的正方形的四个顶点，所以该直线与桌子中心的水平距离为 $\frac{1}{4}a$。

倾侧。对连接远端桌脚底部的直线而言，地面作用于远端桌脚的力没有力矩，地面作用于任何一条桌脚的摩擦力也没有力矩（因为它作用于地面的高度）。作用于中心的向下的力 $10W + 2W = 12W$ 有恢复力矩 $12W \cdot \frac{1}{4}a = 3Wa$。推力 F 则有倾覆力矩 Fa。对这条直线取力矩，离墙最近的两条桌脚所受的法向反作用力（合计）N_1 满足

$$N_1 \cdot \tfrac{1}{2}a = 3Wa - Fa,$$

所以 $N_1 \geq 0$ 当且仅当 $F \leq 3W$。当 $N_1 = 0$ 时，桌子即将倾侧，也就是当

$$\frac{W}{4}\left(1 + \frac{3x}{a}\right) = 3W \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{11a}{3}.$$

滑动。对桌子沿铅垂方向分解力，地面给予的法向反作用力合共为 $12W$，所以可提供的最大总摩擦力为 $\frac{1}{3} \cdot 12W = 4W$。沿水平方向分解力，所需的摩擦力为 F。所以桌子即将滑动的条件是

$$\frac{W}{4}\left(1 + \frac{3x}{a}\right) = 4W \quad \Longleftrightarrow \quad x = 5a.$$

这两个值都在梯子的长度 $6a$ 之内，而 F 随着油漆工向上爬而不断增加。它先达到 $3W$（在 $x = \frac{11}{3}a$ 时），然后才达到 $4W$（在 $x = 5a$ 时）。所以**桌子先倾侧**。这发生在油漆工沿梯子走了 $\frac{11}{3}a$ 之时，即在桌面之上 $\frac{11}{3}a \sin\alpha = \frac{22a}{3\sqrt{5}} \approx 3.28a$ 的高度。在那一刻，地面所需提供的摩擦力只是 $3W$，小于可提供的 $4W$，所以桌子并未滑动。

验算

- 梯上没有油漆工时（$x = 0$），$F = \frac{1}{4}W$，近墙的桌脚承受 $N_1 = \frac{11}{2}W$，而远端的桌脚承受 $\frac{13}{2}W$。远端桌脚承受的力稍大，这与推力背离墙壁的方向相符。
- 用电脑对多个 k 和 x 的值计算各个力。在 (i) 中，所需摩擦力与可提供摩擦力之比的最大值仅略小于 1（在梯顶时为 $\frac{2k+1}{2k+2}$）。在 (ii) 中，电脑求得近墙桌脚的反作用力在 $x \approx 3.667a$ 时变为零，而地面摩擦力在 $x = 5a$ 时达到极限。

常见错误

- 把倾侧的转轴取在距离中心 $\frac{1}{2}a$ 的桌边：桌面的边长是 $\frac{1}{2}a$，所以半阔度是 $\frac{1}{4}a$。
- 忘记了作用于桌子的推力位于高度 a 处，即桌脚的顶端，而不是在地面的高度。正是这个高度令推力产生倾覆力矩。

- 计算地面对桌子的法向反作用力时，漏掉了梯子和油漆工的 $10W$。只计桌子本身的重量 $2W$ 并不足够。

STEP 之外

这道题探讨的是由多个刚体组成的系统怎样以互相竞争的方式失效：滑动，或是翻倒。方法是求出每种方式的临界值，再看负载先达到哪一个。工程师把同样的想法应用于挡土墙、起重机和堆叠的货物；在静力学（statics）课程中，它会进一步引申到虚功原理（principle of virtual work）。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对刚体平衡和摩擦力有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。