详细解答

STEP II 2006，第 8 题

纯数学 · 直线的向量几何

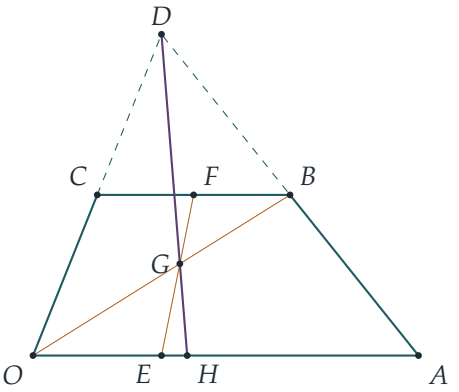
STEP II 2006，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/06-s2-q8

关键思路

题目中每一点都定义为两条直线的交点, 所以整条题目只靠一套固定做法: 把每条直线写成第一部分的形式, 令两个表达式相等, 然后比较 **a** 和 **c** 的系数 (comparing coefficients)。这样比较是合理的，因为 **a** 与 **c** 不平行，所以一个向量写成 $p\mathbf{a}+q\mathbf{c}$ 的方式只有一种。



解答

直线的方程

通过位置向量（position vector）为 **x** 和 **y** 的两点的直线，经过 **x**，方向为 $\mathbf{y}-\mathbf{x}$，所以线上的点是

$$\mathbf{r}=\mathbf{x}+\alpha(\mathbf{y}-\mathbf{x})=(1-\alpha)\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y},$$

其中 α 取遍所有实数。留意 $\alpha = 0$ 给出 $\mathbf{x}$，$\alpha = 1$ 给出 $\mathbf{y}$，而两个系数之和恒为 1。这就是所要求的形式。

在整个解答中，$\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{c}$ 都不平行（否则 O、A、C 三点共线（collinear），便不会有梯形（trapezium）），所以若 $p\mathbf{a} + q\mathbf{c} = p'\mathbf{a} + q'\mathbf{c}$，则 $p = p'$ 且 $q = q'$。

第 (i) 部分

由于 CB 平行于 OA，向量 $\overrightarrow{CB}$ 是 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ 的纯量倍数（scalar multiple）；记它为 $\lambda\mathbf{a}$。于是

$$\mathbf{b} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \mathbf{c} + \lambda\mathbf{a}.$$

按次序绕 $OABC$ 一周，$\overrightarrow{CB}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 方向相同，所以 $\lambda > 0$；而 $CB < OA$ 给出 $\lambda < 1$。因此 $0 < \lambda < 1$，特别地 $\lambda \neq 1$，这一点稍后会用到。

第 (ii) 部分

E **和** F。这两点可直接由比例得出：

$$\mathbf{e} = \tfrac{1}{3}\mathbf{a}, \qquad \mathbf{f} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{b}) = \tfrac{1}{2}\lambda\mathbf{a} + \mathbf{c}.$$

D。直线 OC 上的点是 $\mu\mathbf{c}$。直线 AB 上的点是

$$(1 - \beta)\mathbf{a} + \beta(\lambda\mathbf{a} + \mathbf{c}) = (1 - \beta + \beta\lambda)\mathbf{a} + \beta\mathbf{c}.$$

在 D 点，两者相等。比较系数得 $\beta = \mu$ 及 $1 - \beta(1 - \lambda) = 0$，所以 $\beta = \dfrac{1}{1 - \lambda}$（没有问题，因为 $\lambda \neq 1$）。因此

$$\mathbf{d} = \frac{1}{1 - \lambda}\,\mathbf{c}.$$

由于 $\frac{1}{1-\lambda} > 1$，D 确实位于 OC 越过 C 的延长线上，与预期相符。

G。OB 上的点是 $t(\lambda\mathbf{a} + \mathbf{c})$。$EF$ 上的点是

$$(1 - s)\tfrac{1}{3}\mathbf{a} + s(\tfrac{1}{2}\lambda\mathbf{a} + \mathbf{c}) = (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}s + \tfrac{1}{2}\lambda s)\mathbf{a} + s\mathbf{c}.$$

比较 $\mathbf{c}$ 的系数得 $s = t$；再比较 $\mathbf{a}$ 的系数，得

$$\lambda t = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}t + \tfrac{1}{2}\lambda t \quad\Longrightarrow\quad t\Big(\frac{3\lambda + 2}{6}\Big) = \frac{1}{3} \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{2}{3\lambda + 2}.$$

所以

$$\mathbf{g} = \frac{2}{3\lambda + 2}\,(\lambda\mathbf{a} + \mathbf{c}).$$

H。直线 DG 上的点是

$$(1 - k)\mathbf{d} + k\mathbf{g} = \frac{2k\lambda}{3\lambda + 2}\,\mathbf{a} + \Big(\frac{1 - k}{1 - \lambda} + \frac{2k}{3\lambda + 2}\Big)\mathbf{c}.$$

想一想 怎样从这条直线上找出位于 OA 上的那一点?

直线 OA 上的点只是 $\mathbf{a}$ 的倍数, 所以我们需要 $\mathbf{c}$ 的系数等于零。两边乘以 $(1-\lambda)(3\lambda+2)$,

$$\begin{aligned}(1-k)(3\lambda+2)+2k(1-\lambda)&=0\\(3\lambda+2)-k(3\lambda+2-2+2\lambda)&=0\\k&=\frac{3\lambda+2}{5\lambda}.\end{aligned}$$

这时 $\mathbf{a}$ 的系数是

$$\frac{2\lambda}{3\lambda+2}\cdot\frac{3\lambda+2}{5\lambda}=\frac{2}{5},\qquad \text{所以}\qquad \mathbf{h}=\tfrac{2}{5}\,\mathbf{a}.$$

把答案整理如下:

$$\mathbf{d}=\frac{\mathbf{c}}{1-\lambda},\quad \mathbf{e}=\tfrac{1}{3}\mathbf{a},\quad \mathbf{f}=\tfrac{1}{2}\lambda\mathbf{a}+\mathbf{c},\quad \mathbf{g}=\frac{2(\lambda\mathbf{a}+\mathbf{c})}{3\lambda+2},\quad \mathbf{h}=\tfrac{2}{5}\mathbf{a}.$$

由于 $OH=\frac{2}{5}OA$ 及 $HA=\frac{3}{5}OA$,

$$OH:HA=2:3,$$

不论梯形是甚么形状, 结果都一样。

验算

- 取 $\mathbf{a}=(6,0)$、$\mathbf{c}=(1,2.5)$ 及 $\lambda=\frac{1}{2}$ (即图中的情况)。由公式得 $D=(2,5)$、$G\approx(2.286,1.429)$ 及 $H=(2.4,0)$; 由 D 到 G 的斜率是 $-3.571/0.286=-12.5$, 由 D 到 H 的斜率也是这个值, 即 $-5/0.4$。所以 D、G、H 确实共线。
- H 的答案与 λ、$\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{c}$ 都无关。我们用电脑以精确的有理数运算, 对 2000 个随机梯形重复整个作图过程, 每次都得到 $OH:HA=2:3$。
- 当 $\lambda\to1$ 时, 边 OC 与 AB 趋于平行, 而 $\mathbf{d}=\mathbf{c}/(1-\lambda)$ 跑向无穷远, 与预期相符。

常见错误

- 两条不同的直线用了同一个参数 (parameter) 字母。每条直线都要有自己的参数, 然后才可令两式相等。
- 比较系数却没有说明为何可以这样做: 这方法行得通, 是因为 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{c}$ 不平行。
- 写成 $\mathbf{b}=\mathbf{a}+\lambda\mathbf{c}$。与 $\mathbf{a}$ 平行的是 $\overrightarrow{CB}$, 而不是 $\overrightarrow{AB}$。

STEP 之外

答案 2 : 3 与梯形的形状无关，是因为每一步只用到直线、交点和直线上的比例，而仿射变换（affine map，即线性变换（linear map）之后再作平移）会保持这一切不变。所以你可以把梯形变换成一个方便计算的梯形，例如令 $OABC$ 中的 C 位于 O 的正上方，然后在那里计算。这就是*仿射几何*（affine geometry）的想法；系数形式 $(1-\alpha)\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$ 正是重心坐标（barycentric coordinates）的起点。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra* 讲解线性变换和坐标，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 则有更多这类风格的向量几何题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。