详细解答

STEP II 2006，第 7 题

纯数学 · 椭圆的切线

> **STEP II 2006，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q7

关键思路

求切线（tangent）最快的方法，是用“把 x^2 换成 xx_0、把 y^2 换成 yy_0”的形式，用隐函数微分法（implicit differentiation）也同样可以。至于那个作图，只需求出 Q 的坐标和 PQ 的方程，再与一般点上的切线比较。题目中 $\tan(\alpha/2) = k$ 这几个字是很强的提示：它叫你用 $t = \tan(\alpha/2)$ 来表示 $\cot\alpha$ 和 $\operatorname{cosec}\alpha$。

解答

切线

把 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 对 x 作隐函数微分，得

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0, \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

在 $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$ 处，设 $\sin\alpha \neq 0$（否则切线是铅垂线，题目所给的方程便没有意义），斜率（gradient）为

$$-\frac{b^2 a\cos\alpha}{a^2 b\sin\alpha} = -\frac{b\cot\alpha}{a}.$$

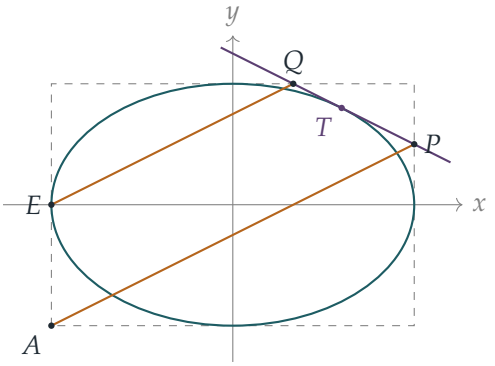
所以切线是

$$\begin{aligned} y - b\sin\alpha &= -\frac{b\cot\alpha}{a}(x - a\cos\alpha) \\ \implies \quad y &= -\frac{b\cot\alpha}{a}x + b\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + b\sin\alpha = -\frac{b\cot\alpha}{a}x + \frac{b(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}{\sin\alpha}, \end{aligned}$$

即 $y = -\dfrac{b\cot\alpha}{a}x + b\operatorname{cosec}\alpha$，这正是所求。

作图

下图取 $a=3$、$b=2$、$k=\frac{1}{2}$。椭圆（ellipse）位于以 $(\pm a,\pm b)$ 为顶点的长方形之内；A 是左下角的顶点，E 是左边的中点，P 在右边上，而 Q 在上边上。



直线 AP 连接 $(-a,-b)$ 与 (a,kb)，所以它的斜率是

$$\frac{kb-(-b)}{a-(-a)}=\frac{(1+k)b}{2a}.$$

通过 $E(-a,0)$ 的平行线是 $y=\dfrac{(1+k)b}{2a}(x+a)$。代入 $y=b$ 得 $x+a=\dfrac{2a}{1+k}$，所以

$$Q=\left(\frac{a(1-k)}{1+k},\ b\right).$$

于是 PQ 的斜率是

$$\frac{b-kb}{\dfrac{a(1-k)}{1+k}-a}=\frac{b(1-k)}{\dfrac{-2ak}{1+k}}=-\frac{b(1-k^2)}{2ak},$$

由于 $k\neq 0$，这个式子没有问题。利用点 $P(a,kb)$，直线 PQ 是

$$y=kb-\frac{b(1-k^2)}{2ak}(x-a)=-\frac{b(1-k^2)}{2ak}\,x+\frac{2k^2b+b(1-k^2)}{2k},$$

所以

$$PQ:\qquad y=-\frac{b}{a}\cdot\frac{1-k^2}{2k}\,x+b\cdot\frac{1+k^2}{2k}.$$

想一想 我们怎样看出这是椭圆上某一点的切线?

把它与上面求得在 $(a\cos\alpha,b\sin\alpha)$ 处的切线比较。我们需要找一个 α，使得 $\cot\alpha=\dfrac{1-k^2}{2k}$ 及 $\operatorname{cosec}\alpha=\dfrac{1+k^2}{2k}$。这正是 t 公式（t-formulae）：设 $t=\tan(\alpha/2)$，则

$$\tan\alpha=\frac{2t}{1-t^2},\qquad \sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \text{所以}\qquad \cot\alpha=\frac{1-t^2}{2t},\qquad \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1+t^2}{2t}.$$

由于 $0 < k < 1$，我们可以取 $\alpha = 2\arctan k$，它位于 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之内，所以 $\sin\alpha \neq 0$，而且 $\tan(\alpha/2) = k$。取 $t = k$，这两个表达式便与 PQ 的斜率和截距（intercept）都吻合。所以 PQ 就是直线 $y = -\frac{b\cot\alpha}{a}x + b\operatorname{cosec}\alpha$，亦即椭圆在 $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$ 处的切线，其中 $\tan(\alpha/2) = k$。这正是我们要证明的。

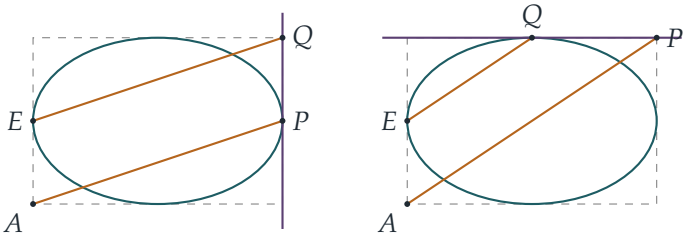
用坐标表示，切点（point of contact）是 $T = \left(\frac{a(1-k^2)}{1+k^2}, \frac{2kb}{1+k^2}\right)$。

$k = 0$ 与 $k = 1$ 的情况

上面的代数运算曾经除以 k，而切线公式又需要 $\sin\alpha \neq 0$，所以我们直接把作图重做一次。

$k = 0$。这时 $P = (a, 0)$，而 AP 的斜率是 $\frac{b}{2a}$。通过 E 的平行线是 $y = \frac{b}{2a}(x + a)$，它与 $y = b$ 相交于 $x = a$，所以 $Q = (a, b)$。于是 PQ 是铅垂线 $x = a$。这是椭圆在 $(a, 0)$ 处的切线，该点对应 $\alpha = 0$，而 $\tan(0/2) = 0 = k$。所以即使这条切线不能写成 $y = mx + c$ 的形式，结果确实仍然成立。

$k = 1$。这时 $P = (a, b)$，而 AP 是长方形的对角线，斜率为 $\frac{b}{a}$。通过 E 的平行线是 $y = \frac{b}{a}(x + a)$，它与 $y = b$ 相交于 $x = 0$，所以 $Q = (0, b)$。于是 PQ 是水平线 $y = b$，即椭圆最高点 $(0, b)$ 处的切线。这一点对应 $\alpha = \frac{\pi}{2}$，而 $\tan(\pi/4) = 1 = k$。所以结果在这里同样成立（而且公式也适用：由 $\cot\frac{\pi}{2} = 0$ 和 $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2} = 1$ 得出 $y = b$）。



验算

- 取 $a = 3$、$b = 2$、$k = \frac{1}{2}$。这时 $Q = (1, 2)$，而 PQ 是 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$。另外 $\tan\alpha = \frac{4}{3}$，所以 $\cos\alpha = \frac{3}{5}$、$\sin\alpha = \frac{4}{5}$，而 $T = (\frac{9}{5}, \frac{8}{5})$。这一点在 PQ 上（$-\frac{9}{10} + \frac{5}{2} = \frac{8}{5}$），而该处的斜率是 $-\frac{b^2x}{a^2y} = -\frac{4\cdot 9/5}{9\cdot 8/5} = -\frac{1}{2}$。
- 把 PQ 代入椭圆方程，应该得到一条有重根（repeated root）的二次方程。我们已用一千组随机的 a、b、k 以数值方法验证了这一点，以及 Q 和 PQ 的公式。
- 当 $k \to 0^+$ 时，$T \to (a, 0)$；当 $k \to 1^-$ 时，$T \to (0, b)$。这与两个端点情况一致。

常见错误

- 弄错 PQ 斜率的正负号：分母 $\frac{a(1-k)}{1+k} - a$ 是负数。
- 因为 $\operatorname{cosec} 0$ 没有定义，便说结果在 $k = 0$ 时不成立。失效的只是公式，几何上并没有问题：PQ 仍然是 $\alpha = 0$ 处的切线。

STEP 之外

代换 $t = \tan(\alpha/2)$ 给出椭圆的一个有理参数化（rational parametrisation）：$\left(a\frac{1-t^2}{1+t^2}, b\frac{2t}{1+t^2}\right)$。把三角函数积分化为有理函数积分，以及求出所有毕氏三元数（Pythagorean triples），用的都是同一个想法。每一条圆锥曲线（conic）都可以这样作有理参数化，而像本题这种只靠平行线和交点完成的作图，正是射影几何（projective geometry）研究的对象。想初步了解这与数论（number theory）的关系，可以读 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。