详细解答

STEP II 2006，第 5 题

纯数学 · 下取整函数与面积

STEP II 2006，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/06-s2-q5

关键思路

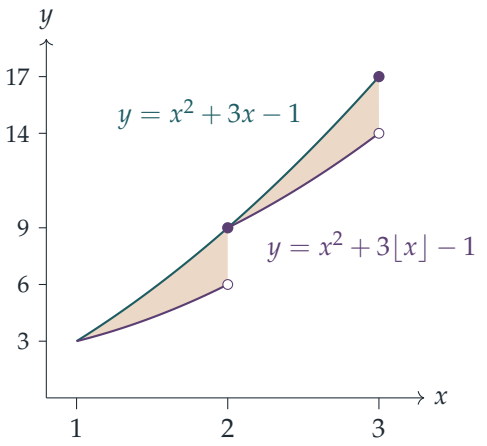
在两个相邻整数之间，即 $k \le x < k+1$ 时，下取整函数（floor function）是常数，其值为 k。因此在每一个这样的单位区间上，那条锯齿状的曲线其实只是一条普通的光滑曲线，而所求面积可以分拆成若干长条的面积之和，每个单位区间对应一条。先把 $[k, k+1]$ 上那一条的面积写成 k 的函数，再把 $k = 1, 2, \ldots, n-1$ 的各条加起来。

解答

以下一律记 $f(x) = x^2 + 3x - 1$。在 $1 \le x \le 3$ 上，它由 $f(1) = 3$ 经过 $f(2) = 9$ 升至 $f(3) = 17$；而且对所有 $x \ge 1$ 它都是递增的，因为在该范围内 $f'(x) = 2x + 3 > 0$。

第 (i) 部分

第二条曲线是 $y = x^2 + 3\lfloor x \rfloor - 1$。在 $[1, 2)$ 上有 $\lfloor x \rfloor = 1$，所以它是 $y = x^2 + 2$，由 3 升向 6；在 $[2, 3)$ 上有 $\lfloor x \rfloor = 2$，所以它是 $y = x^2 + 5$，由 9 升向 14；而在 $x = 3$ 处它等于 17。每一段都是抛物线 $y = f(x)$ 向下平移所得，而两条曲线在每个整数处相交。



两条曲线之间的垂直距离是

$$(x^2 + 3x - 1) - (x^2 + 3\lfloor x \rfloor - 1) = 3(x - \lfloor x \rfloor) \geq 0,$$

所以第一条曲线永远不会在第二条之下。在区间 $[k, k+1]$ 上（k 为整数），这个距离是 $3(x-k)$，只有 $x = k+1$ 这一点例外，而单独一点并不影响积分。因此 $[k, k+1]$ 上的长条面积为

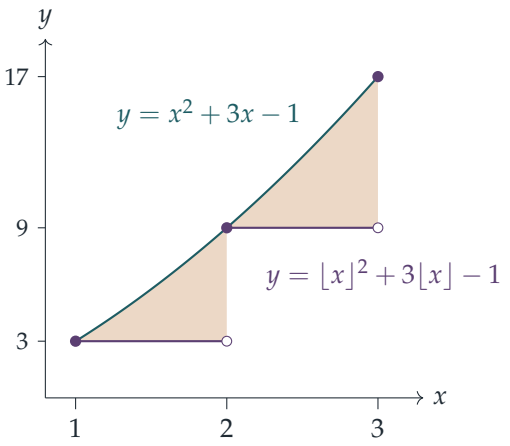
$$\int_k^{k+1} 3(x-k)\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{3}{2}(x-k)^2\right]_k^{k+1} = \tfrac{3}{2},$$

对每个 k 都相同。区间 $1 \leq x \leq n$ 由 $n-1$ 个单位区间 $[1,2], [2,3], \ldots, [n-1, n]$ 组成，所以两条曲线之间的面积是

$$\tfrac{3}{2}(n-1).$$

第 (ii) 部分

现在第二条曲线是 $y = f(\lfloor x \rfloor)$，这是一个阶梯函数（step function）：在 $[1,2)$ 上 $y = f(1) = 3$，在 $[2,3)$ 上 $y = f(2) = 9$，而在 $x = 3$ 处 $y = f(3) = 17$。每一级阶梯都由抛物线上某个整数点出发，水平向右延伸。



想一想 哪一条曲线在上方？它会一直在上方吗？

由于 f 在 $x \geq 1$ 时递增，而且 $\lfloor x \rfloor \leq x$，所以在整个 $1 \leq x \leq n$ 上都有 $f(\lfloor x \rfloor) \leq f(x)$。因此抛物线始终在上方，所求面积就是 $f(x) - f(\lfloor x \rfloor)$ 的积分，无须担心正负号改变。

在 $[k, k+1]$ 上（$k \geq 1$ 为整数），阶梯的高度是 $f(k)$（同样不理会 $x = k+1$ 这一点）。代入 $x = k + t$，其中 $0 \leq t \leq 1$，

$$\begin{aligned} f(k+t) - f(k) &= (k+t)^2 + 3(k+t) - 1 - (k^2 + 3k - 1) \\ &= 2kt + t^2 + 3t, \end{aligned}$$

所以 $[k, k+1]$ 上的长条面积为

$$\int_0^1 (2kt + t^2 + 3t)\,\mathrm{d}t = k + \tfrac{1}{3} + \tfrac{3}{2} = k + \tfrac{11}{6}.$$

与第 (i) 部分不同，这次长条的面积随 k 增大，因为抛物线愈来愈陡。把 $k = 1, 2, \ldots, n-1$ 的长条加起来，并利用 $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}n(n-1)$，

$$\begin{aligned} \text{面积} &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(k + \tfrac{11}{6}\right) = \tfrac{1}{2}n(n-1) + \tfrac{11}{6}(n-1) \\ &= \tfrac{1}{6}(n-1)(3n+11), \end{aligned}$$

这正是所要求的结果。

验算

- 当 $n = 1$ 时根本没有区域，而两个答案都给出 0。
- 当 $n = 2$ 时，第 (ii) 部分给出 $\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 17 = \frac{17}{6}$。直接计算，$\int_1^2 (x^2 + 3x - 4)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{3} + \frac{9}{2} - 4 = \frac{17}{6}$。

- 以中点法则（midpoint rule）对 $n = 2, \ldots, 7$ 的差距作数值积分，结果与 $\frac{3}{2}(n-1)$ 及 $\frac{1}{6}(n-1)(3n+11)$ 吻合至小数点后四位；例如 $n = 4$ 时第 (ii) 部分给出 11.5。

常见错误

- 数成 n 条长条而不是 $n-1$ 条：区间 $[1, n]$ 只包含 $n-1$ 个单位区间。
- 在第 (ii) 部分，误用 $\int_0^1 2kt \, \mathrm{d}t = 2k$ 而不是 k。
- 在整个区间上把 $\lfloor x \rfloor$ 当作 x 来积分（或干脆忽略它），而没有先在各整数处把区间分开。

STEP 之外

第 (ii) 部分比较的是曲线下的面积与曲线下方一列“阶梯”状矩形的面积，这正正是步长为 1 的黎曼下和（lower Riemann sum）。在大学第一门分析（analysis）课程中，积分的定义就是让阶梯愈来愈窄，把这样的下和与上和夹在一起；而像 $\lfloor x \rfloor$ 这类有跳跃的函数仍然可积（integrable），因为它们的跳跃点都是孤立点。Abbott 的 *Understanding Analysis* 对黎曼积分（Riemann integral）有非常易读的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。