详细解答

STEP II 2006，第 4 题

纯数学 · 代换积分法

> **STEP II 2006，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q4

关键思路

代换（substitution）$x = \pi - t$ 不会改变 $\sin x$，却会把因子 x 变成 $\pi - t$，于是原来的积分在等式右边再次出现，可以像解方程一样把它解出来。这样就完全消去了碍事的因子 x。此后，题目中每个积分都是 $\sin x$ 的函数乘以 $\sin x$（或 $\cos x$），再用代换 $u = \cos x$ 或 $u = \sin x$ 便可完成。真正要花心思的，是看出怎样把第 (ii) 和第 (iii) 部分化成这条恒等式（identity）适用的形式。

解答

恒等式

设 $I = \int_0^\pi x\, f(\sin x)\, \mathrm{d}x$。令 $x = \pi - t$，则 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$；当 $x = 0$ 时，$t = \pi$，而当 $x = \pi$ 时，$t = 0$。由于 $\sin(\pi - t) = \sin t$，

$$\begin{aligned} I &= \int_\pi^0 (\pi - t)\, f(\sin t)\, (-\mathrm{d}t) = \int_0^\pi (\pi - t)\, f(\sin t)\, \mathrm{d}t \\ &= \pi \int_0^\pi f(\sin t)\, \mathrm{d}t - \int_0^\pi t\, f(\sin t)\, \mathrm{d}t = \pi \int_0^\pi f(\sin x)\, \mathrm{d}x - I, \end{aligned}$$

因为积分变量叫甚么名字并无关系。因此 $2I = \pi \int_0^\pi f(\sin x)\, \mathrm{d}x$，这正是我们所需的结果：

$$\int_0^\pi x\, f(\sin x)\, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^\pi f(\sin x)\, \mathrm{d}x.$$

第 (i) 部分

这里 $f(\sin x) = \dfrac{\sin x}{3+\sin^2 x}$，所以由恒等式可得

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi J, \qquad J = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

写成 $3+\sin^2 x = 4-\cos^2 x$，并代入 $u=\cos x$，$\mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$，其中 u 由 1 递减至 -1：

$$J = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{4-u^2}.$$

利用部分分式（partial fractions），$\dfrac{1}{4-u^2} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2-u}+\dfrac{1}{2+u}\right)$，所以

$$J = \frac{1}{4}\left[\ln\frac{2+u}{2-u}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}(\ln 3 - \ln\tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{2}\ln 3.$$

（在 $[-1,1]$ 上，$2\pm u$ 两者皆为正数，所以无须加上绝对值符号。）因此

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\ln 3.$$

第 (ii) 部分

想一想 恒等式只适用于 $[0,\pi]$。我们该怎样处理 $[\pi, 2\pi]$?

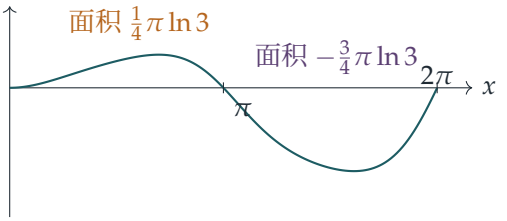
在 π 处把积分范围分成两段，再用 $x = \pi + t$ 把第二段平移回 $[0,\pi]$。这时 $\sin x = -\sin t$ 而 $\sin^2 x = \sin^2 t$，所以

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x &= -\int_0^{\pi} \frac{(\pi+t)\sin t}{3+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = -\pi J - \int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{3+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\tfrac{1}{2}\pi\ln 3 - \tfrac{1}{4}\pi\ln 3 = -\tfrac{3}{4}\pi\ln 3,\end{aligned}$$

当中用到 $J = \frac{1}{2}\ln 3$ 和第 (i) 部分的结果。加上第 (i) 部分在 $[0,\pi]$ 上的积分，

$$\int_0^{2\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\ln 3 - \frac{3\pi}{4}\ln 3 = -\frac{\pi}{2}\ln 3.$$

下面的草图说明了答案为何是负数：被积函数（integrand）在两半区间上的形状相同，但在 $[\pi, 2\pi]$ 上，它所乘的 x 值较大。



第 (iii) 部分

由于 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$，而且在 $[0,\pi]$ 上 $\sin x \geq 0$，

$$|\sin 2x| = 2\sin x\,|\cos x| = 2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x},$$

这纯粹是 $\sin x$ 的函数。

> ? **想一想** 为甚么这里出现的是 $|\cos x|$ 而不是 $\cos x$，这一点如此重要?

在 $[0,\pi]$ 上，$\cos x$ 并不是 $\sin x$ 的函数：$\cos(\pi - x) = -\cos x$，而 $\sin(\pi - x) = \sin x$。但 $|\cos x| = \sqrt{1-\sin^2 x}$ 却是，所以正是有了绝对值，我们才可以使用恒等式：

$$\int_0^\pi \frac{x|\sin 2x|}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi\int_0^\pi \frac{|\sin 2x|}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

新的被积函数在 $x \mapsto \pi - x$ 之下保持不变，所以在 $[0,\pi]$ 上的积分是在 $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 上的积分的两倍，而在后者的区间上 $\cos x \geq 0$，绝对值符号可以去掉：

$$\int_0^\pi \frac{|\sin 2x|}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x\cos x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\Big[\ln(3+\sin^2 x)\Big]_0^{\pi/2} = 2\ln\tfrac{4}{3},$$

因为分子正是分母的导数。因此

$$\int_0^\pi \frac{x|\sin 2x|}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi\cdot 2\ln\tfrac{4}{3} = \pi\ln\frac{4}{3}.$$

验算

- 用辛普森法则 (Simpson's rule) 计算，(i) 得 0.86285，(ii) 得 -1.72570，(iii) 得 0.90378，与 $\frac{1}{4}\pi\ln 3$、$-\frac{1}{2}\pi\ln 3$ 和 $\pi\ln\frac{4}{3}$ 吻合。
- (ii) 的答案恰好是 (i) 的答案的 -2 倍。在 π 处分段便可解释这一点：两半分别是 $\frac{1}{4}\pi\ln 3$ 和 $-\frac{3}{4}\pi\ln 3$。
- 快速检验一下恒等式：取 $f \equiv 1$，两边都等于 $\frac{1}{2}\pi^2$。

常见错误

- 在 $[0,2\pi]$ 上套用类似的“恒等式”，这样会得出 $\pi\int_0^{2\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = 0$。证明需要用到 $\sin(2\pi - t) = \sin t$，而这是错的。
- 在 (iii) 中，在整个 $[0,\pi]$ 上都写 $|\sin 2x| = 2\sin x\cos x$，这样里面的积分会得出 0。

STEP 之外

让积分再次出现然后把它解出来的技巧，以及运用 $x \mapsto \pi - x$ 这类对称性（symmetry），都是分析学（analysis）中的标准工具，也常用于计算没有初等原函数（elementary antiderivative）的定积分。它们通向傅里叶级数（Fourier series），在那里，x 乘以三角函数在一个周期上的积分正是最基本的研究对象。想多了解这类论证手法，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*；至于积分的严格理论，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。