详细解答

STEP II 2006，第 3 题

纯数学 · 根式与近似

> **STEP II 2006，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q3

关键思路

数 $5+\sqrt{24}$ 有一个“共轭数”（conjugate）$5-\sqrt{24}$，两者相乘等于 1。把一个数与其共轭数的同次幂相加，所有根式（surd）都会互相抵消，所以和是整数。共轭数很小，它的幂就更加微小，因此那个大的幂必定恰好略小于一个整数。第 (ii) 部分是同一个论证，只是把 5 换成 N。

解答

第 (i) 部分

设 $a=5+\sqrt{24}$ 及 $b=5-\sqrt{24}$。则

$$a+b=10, \qquad ab=25-24=1,$$

所以 $b=1/a$。因此我们要求的式子就是 a^4+b^4。两次运用 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$：

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= 10^2-2=98, \\ a^4+b^4 &= (a^2+b^2)^2-2(ab)^2=98^2-2=9602. \end{aligned}$$

所以 $a^4+\dfrac{1}{a^4}=9602$，是一个整数。

至于各个不等式（inequality），记得 $\dfrac{1}{a}=b=5-\sqrt{24}$。

- $b>0.1 \iff \sqrt{24}<4.9 \iff 24<24.01$，这是成立的。（这里取平方是可逆的，因为两边都是正数。）

- $b < \frac{2}{19} \iff \sqrt{24} > 5 - \frac{2}{19} = \frac{93}{19} \iff 24 \cdot 19^2 > 93^2 \iff 8664 > 8649$，这是成立的。
- $\frac{2}{19} < 0.11 \iff 2 < 2.09$，这是成立的。

所以 $0.1 < \dfrac{1}{5+\sqrt{24}} < \dfrac{2}{19} < 0.11$。

想一想 这些上下界怎样把 a^4 确定至小数点后四位?

由第一个结果，$a^4 = 9602 - b^4$。把各项皆为正数的不等式 $0.1 < b < 0.11$ 取四次方，

$$0.0001 < b^4 < 0.11^4 = 0.00014641,$$

因此

$$9601.99985359 < a^4 < 9601.9999.$$

这个区间内的每一个数都介乎 9601.99985 与 9601.9999 之间，所以舍入后得

$$\left(5+\sqrt{24}\right)^4 = 9601.9999 \text{ （准确至小数点后四位）。}$$

（较精确的上界 $b < \frac{2}{19}$ 给出 $b^4 < \frac{16}{130321} \approx 0.000123$，这里用不着，但它说明了 $\frac{2}{19}$ 的来历：见“验算”。）

第 (ii) 部分

设 $A = N + \sqrt{N^2-1}$ 及 $B = N - \sqrt{N^2-1}$，由于 $N \geq 2$，两者皆为实数。与之前一样，

$$A + B = 2N, \qquad AB = N^2 - (N^2-1) = 1.$$

*第一步：$A^k + B^k$ 是整数。*用二项式定理（binomial theorem）展开这两个幂。含 $\sqrt{N^2-1}$ 偶数次幂的项都是整数，而且在两个展开式中完全相同；含奇数次幂的项则正负号相反，互相抵消。所以对每个正整数 k，$S_k = A^k + B^k$ 都是整数。（另一做法：A 和 B 是 $x^2 - 2Nx + 1 = 0$ 的根，所以 $S_k = 2NS_{k-1} - S_{k-2}$，其中 $S_0 = 2$，$S_1 = 2N$，再用归纳法（induction）便知它们全是整数。）

*第二步：B 很小。*我们断言 $0 < B < \dfrac{1}{2N - \frac{1}{2}}$。由于 $B = 1/A$ 且 $A > 0$，这等价于

$$A > 2N - \tfrac{1}{2} \iff \sqrt{N^2-1} > N - \tfrac{1}{2}.$$

两边都是正数（因为 $N \geq 2$），所以可以取平方：

$$N^2 - 1 > N^2 - N + \tfrac{1}{4} \iff N > \tfrac{5}{4},$$

而这是成立的，因为 $N \geq 2$。所以 $0 < B < \left(2N - \frac{1}{2}\right)^{-1}$，再取 k 次方（各项皆为正数），

$$0 < B^k < \left(2N - \tfrac{1}{2}\right)^{-k}.$$

第三步：作结。我们有 $A^k = S_k - B^k$，所以 A^k 与整数 S_k 的距离恰好是 B^k。最接近 A^k 的整数，与它的距离不会比 S_k 更远（事实上这个整数就是 S_k，因为 $B^k < \frac{1}{2}$）。因此

$$\left|A^k - (\text{最接近的整数})\right| \le B^k < \left(2N - \tfrac{1}{2}\right)^{-k},$$

这就是所要证明的结果。

验算

- 以数值计算，$(5+\sqrt{24})^4 \approx 9601.999896$，落在我们的区间之内，舍入后是 9601.9999。
- 取 $N = 5$，第 (ii) 部分给出 $(2N - \frac{1}{2})^{-1} = \frac{1}{9.5} = \frac{2}{19}$：正正是第 (i) 部分的上界。所以第 (i) 部分其实就是 $N = 5$，$k = 4$ 的情况，只是换了个面貌。
- 当 $N = 2$，$k = 1$：$2 + \sqrt{3} \approx 3.732$ 与 4 相距约 0.268，而 $(3.5)^{-1} \approx 0.286$，所以上界成立。我们亦用电脑核对过 N 至 1000、k 至 24 的所有情况。

常见错误

- 把 $\sqrt{N^2-1} > N - \frac{1}{2}$ 两边取平方，却没有指出两边都是正数。
- 写成 $a^4 \approx 9602.0000$：这个值比 9602 小，相差介乎 0.0001 与 0.00015 之间，而这已足以改变小数点后第四位。
- 忘记了排除 $N = 1$ 的情况是有原因的：那时 $B = 1$，整个论证便不成立。

STEP 之外

像 $5 + \sqrt{24}$ 这样的数是环（ring）$\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ 中的单位（unit）：它们有同一形式的逆元 $5 - \sqrt{24}$，而它们的幂给出佩尔方程（Pell equation）$x^2 - 24y^2 = 1$ 的所有解。这类单位的幂会越来越接近整数，这也是通往皮索数（Pisot number）理论的其中一条途径，皮索数的幂同样有这种接近整数的性质。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（一本初等数论名著）对佩尔方程和连分数（continued fraction）有十分精彩的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。