详细解答

STEP II 2006，第 10 题

力学 · 碰撞与恢复系数

STEP II 2006，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/06-s2-q10

关键思路

每一次碰撞都是一道两条方程的问题：沿直线方向的动量守恒（conservation of momentum），以及牛顿恢复定律（Newton's law of restitution）（分离速率等于 e 乘以接近速率）。先解 A–B 碰撞，再把 B 的新速度代入 B–C 碰撞。第二次 A–B 碰撞发生，当且仅当位于 B 后方的 A，其向前的速度最终大于 B 在 B 撞上 C 之后的速度。第 (ii) 部分于是成为一道匀速的追及问题。

解答

我们把 A、B 和 C 视为在光滑（smooth）平面上沿一条直线运动的质点（particle），因此除碰撞期间外，并无水平力作用。取 A 被抛射的方向为正方向。以下所有速度均带正负号。

第 (i) 部分

A 与 B 的碰撞。设 A 和 B 在碰撞刚结束时的速度分别为 v_A 和 v_B。由动量守恒和恢复定律（其中 $e = \frac{1}{2}$）得

$$mv_A + km\,v_B = mu, \qquad v_B - v_A = \tfrac{1}{2}u.$$

把 $v_A = v_B - \frac{1}{2}u$ 代入第一条方程，得 $(1+k)v_B = \frac{3}{2}u$，所以

$$v_B = \frac{3u}{2(1+k)}, \qquad v_A = v_B - \frac{u}{2} = \frac{(2-k)\,u}{2(1+k)}.$$

由于 $v_B > 0$，B 确实会继续向 C 移动；又由于 $v_A < v_B$，A 不可能在 B 到达 C 之前追上 B。

B 与 C 的碰撞。设 B 和 C 在碰撞刚结束时的速度分别为 w_B 和 w_C。取 $e = \frac{1}{4}$，

$$km\,w_B + 3m\,w_C = km\,v_B, \qquad w_C - w_B = \tfrac{1}{4}v_B.$$

代入 $w_C = w_B + \frac{1}{4}v_B$，得 $(k+3)w_B = (k - \frac{3}{4})v_B$，所以

$$w_B = \frac{(4k-3)\,v_B}{4(k+3)} = \frac{3(4k-3)\,u}{8(1+k)(k+3)}.$$

此外 $w_C > w_B$，所以 B 和 C 互相分开，此后不再相遇。这次碰撞之后，在 A 或 B 身上再无其他作用，直至两者相遇为止（假如真的会相遇）。

想一想 A 与 B 再次碰撞的确切条件是甚么？

一旦 B 撞上 C，A 和 B 都以恒定速度运动，而 A 在 B 的后方（即位于 B 的负方向一侧）。两者之间的距离缩短，当且仅当 $v_A > w_B$，而这时距离会在有限时间内缩减至零。若 $v_A \le w_B$，距离永不减少。这一条不等式已涵盖所有正负号的情况：例如，若 A 正在向后运动，但 B 向后运动得更快，B 仍会追上 A，而这同样是 $v_A > w_B$。

所以我们需要

$$\frac{(2-k)u}{2(1+k)} > \frac{3(4k-3)u}{8(1+k)(k+3)}.$$

两边乘以 $8(1+k)(k+3)/u$（由于 $k>0$，此数为正），得到等价的不等式

$$\begin{aligned} 4(2-k)(k+3) &> 3(4k-3) \\ 24 - 4k - 4k^2 &> 12k - 9 \\ 4k^2 + 16k - 33 &< 0 \\ (2k-3)(2k+11) &< 0. \end{aligned}$$

由于 $2k+11>0$，上式成立当且仅当 $2k-3<0$。因为 k 是质量之比，$k>0$。因此 A 与 B 发生第二次碰撞，当且仅当

$$0 < k < \tfrac{3}{2}.$$

当 $k = \frac{3}{2}$ 时，我们得到 $v_A = w_B = \frac{u}{10}$：两者以相同速率一同前进，实际上永不再相遇，所以端点不包括在内。

第 (ii) 部分

取 $k=1$，由上面的公式得

$$v_A = \frac{u}{4}, \qquad v_B = \frac{3u}{4}, \qquad w_B = \frac{3u}{64}, \qquad w_C = \frac{15u}{64}.$$

把原点设在 A 与 B 首次碰撞之处（即 B 的起始位置），并由该次碰撞起计算时间 t。

直至 B–C 碰撞。B 以速率 $\frac{3}{4}u$ 走过与 C 相隔的距离 d，所需时间为

$$t_1 = \frac{d}{3u/4} = \frac{4d}{3u}.$$

在这段时间内，A 移动了 $\frac{u}{4}\cdot\frac{4d}{3u} = \frac{d}{3}$。所以 A 位于 $\frac{d}{3}$，而 B 位于 d：两者相距 $\frac{2d}{3}$。

追赶。现在 A 以 $\frac{u}{4} = \frac{16u}{64}$ 运动，而 B 以 $\frac{3u}{64}$ 运动，所以 A 以相对速率 $\frac{13u}{64}$ 拉近距离。所需时间为

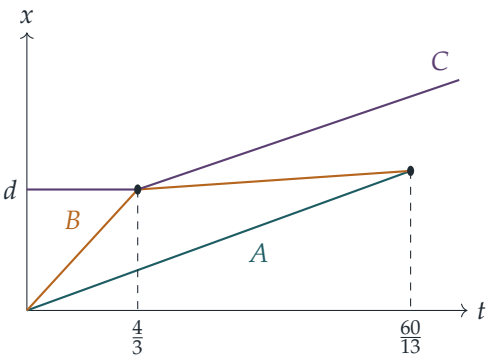
$$t_2 = \frac{2d/3}{13u/64} = \frac{128d}{39u}.$$

总时间。两次 A–B 碰撞之间相隔的时间为

$$t_1 + t_2 = \frac{4d}{3u} + \frac{128d}{39u} = \frac{52d + 128d}{39u} = \frac{180d}{39u} = \frac{60d}{13u},$$

正如所求。

下面的距离–时间图显示了整个运动过程，其中 $u = d = 1$。代表 A 和 B 的两条线在 $t = \frac{60}{13}$ 再次相交。



验算

- 动量：取 $k = 1$，第一次碰撞后 $m\cdot\frac{u}{4} + m\cdot\frac{3u}{4} = mu$，第二次碰撞后 $m\cdot\frac{3u}{64} + 3m\cdot\frac{15u}{64} = \frac{48}{64}mu = m\cdot\frac{3u}{4}$。两者均平衡。
- 边界 $k = \frac{3}{2}$：v_A 和 w_B 都等于 $\frac{u}{10}$，这印证了临界值。
- 合理性检查：当 k 很大时，A 向后反弹（$v_A < 0$），而 B 继续向前，所以显然没有第二次碰撞。这与所得范围吻合。
- 我们以数值方法验证过：对 10^5 个随机有理数 k，$v_A > w_B$ 成立当且仅当 $k < \frac{3}{2}$；另外，取 $u = d = 1$ 作逐步时间模拟，得出第二次碰撞发生于 $t \approx 4.6154$，与 $\frac{60}{13} \approx 4.6154$ 相符。

常见错误

- 在恢复定律中使用速率而非带正负号的速度。使用带正负号的速度时，分离速率就是“前者减后者”，而 v_A 的正负号自然会得到妥善处理。
- 把 $v_A > 0$ 当作条件的一部分。原则上 A 可以向后运动而仍被 B 追上（若 $w_B < v_A$）。唯一的条件 $v_A > w_B$ 才是正确的条件。
- 在第 (ii) 部分，由第一次碰撞起计算追赶时间，而不是由 B 的速度改变的一刻起计算，因而漏掉了 $\frac{d}{3}$ 这段 A 早已走过的领先距离。

STEP 之外

动量守恒与恢复定律合起来，使每一次碰撞都成为由碰撞前速度到碰撞后速度的线性映射（linear map）。一连串的碰撞，例如牛顿摆（Newton's cradle），或是计算两个方块与一面墙之间碰撞次数的著名问题，便可通过复合这些映射来研究。在大学一年级的力学中，这会引伸至质心参考系（centre-of-mass frame），在其中恢复定律变成相对速度的简单缩放，并进一步推展至二维和三维的碰撞。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）对碰撞和质心参考系有清晰的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。