详细解答

STEP II 2006，第 1 题

纯数学 · 周期性递推关系

STEP II 2006，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/06-s2-q1

关键思路

由于每一项都决定了下一项，只要 $u_{p+1} = u_1 = 2$，数列（sequence）便会以周期（period）p 重复。因此 (i) 的每一部分，归根究底都是把头几项写成 k 的函数，然后解一条多项式方程。周期为 4 的方程必定包含周期 1 和周期 2 的答案作为因式（周期为 1 或 2 的数列同样满足 $u_5 = u_1$），事先知道这一点，因式分解（factorisation）便轻而易举。第 (ii) 部分是一行便可完成的归纳法（induction），之后再用惯常的“在递推关系（recurrence）中令 $n \to \infty$”的论证。

解答

第 (i) 部分

设 $f(u) = k - \dfrac{36}{u}$，则 $u_{n+1} = f(u_n)$。若 $u_{p+1} = u_1$，则反复应用 f 可得 $u_{p+2} = u_2$、$u_{p+3} = u_3$，如此类推，所以对每个 n 都有 $u_{n+p} = u_n$。反过来说，周期为 p 当然需要 $u_{p+1} = u_1 = 2$。因此，数列的周期恰好为 p，当且仅当 $u_{p+1} = 2$（而且各项均有定义，即永不为 0），并且没有更小的周期符合条件。

(a) 数列为常数数列，当且仅当 $u_2 = 2$，即 $k - 18 = 2$。所以 $k = 20$。

(b) 我们有 $u_2 = k - 18$，以及

$$u_3 = k - \frac{36}{k-18} \qquad (k \neq 18).$$

令 $u_3 = 2$，得 $(k-2)(k-18) = 36$，所以 $k^2 - 20k = 0$，即 $k = 0$ 或 $k = 20$。$k = 20$ 给出常数数列，其周期为 1，而不是 2。当 $k = 0$ 时，数列为 $2, -18, 2, -18, \ldots$，周期确实

是 2。所以 $k = 0$。

(c) 我们还需要多计两项。当 $k \neq 18$ 时，

$$u_3 = \frac{k(k-18)-36}{k-18} = \frac{k^2-18k-36}{k-18},$$

然后，只要 $k^2 - 18k - 36 \neq 0$，便有

$$u_4 = k - \frac{36(k-18)}{k^2-18k-36} = \frac{k^3-18k^2-72k+648}{k^2-18k-36}.$$

条件 $u_5 = 2$ 表示 $k - 36/u_4 = 2$，即 $u_4 = \dfrac{36}{k-2}$（这里需要 $k \neq 2$；若 $k = 2$，则 $36/u_4 = 0$，这是不可能的）。交叉相乘，得

$$(k-2)(k^3-18k^2-72k+648) = 36(k^2-18k-36).$$

展开后把所有项移到左边，

$$k^4-20k^3-36k^2+792k-1296 = 36k^2-648k-1296,$$
$$k^4-20k^3-72k^2+1440k = 0.$$

> **想一想** 怎样才可以不必反复试验，就把这样的四次多项式（quartic）分解因式？

动手之前，我们已经知道其中两个根。任何周期为 1 或 2 的数列同样满足 $u_5 = u_1$，所以 $k = 20$ 和 $k = 0$ 必定是根。先抽出 k，再抽出 $k - 20$，

$$k^4-20k^3-72k^2+1440k = k(k-20)(k^2-72).$$

所以 $k \in \{0, 20, 6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}\}$。0 和 20 分别给出周期 2 和 1，所以新的值是 $k = \pm 6\sqrt{2}$。

最后，我们利用 $k^2 = 72$，验证当 $k = \pm 6\sqrt{2}$ 时各项均有定义：

- $u_2 = k - 18 \neq 0$；
- u_3 的分子是 $k^2 - 18k - 36 = 36 - 18k$，由于 $k \neq 2$，它不等于零；
- u_4 的分子是 $k(k^2-72) - 18k^2 + 648 = -1296 + 648 = -648 \neq 0$；
- 按构造 $u_5 = 2$，而且 $k \neq 2$、$k \neq 18$，符合推导过程中的要求。

由于 $k \neq 0, 20$，周期不是 1 或 2；而一个满足 $u_5 = u_1$ 的数列，若最小周期不是 1 或 2，其最小周期必定恰好是 4（最小周期必须整除 4）。所以数列的周期为 4，当且仅当 $k = \pm 6\sqrt{2}$。

第 (ii) 部分

取 $k = 37$。我们用归纳法证明 $u_n \geq 2$。当 $n = 1$ 时，由于 $u_1 = 2$，命题成立。若 $u_n \geq 2$，则 $u_n > 0$，所以 $0 < \dfrac{36}{u_n} \leq 18$，因此

$$u_{n+1} = 37 - \frac{36}{u_n} \geq 37 - 18 = 19 \geq 2.$$

所以对所有 n 都有 $u_n \geq 2$，这正是我们要证明的。（事实上，对所有 $n \geq 2$ 都有 $u_n \geq 19$。）

> **想一想** 极限（limit）所满足的方程有两个根。哪一个才是正确的？又为甚么可以在递推关系中令 $n \to \infty$？

由于 $u_n \to \ell$ 而且每个 $u_n \geq 2$，我们有 $\ell \geq 2$；特别地，$\ell \neq 0$，所以 $36/u_n \to 36/\ell$。在 $u_{n+1} = 37 - 36/u_n$ 的两边令 $n \to \infty$（左边同样趋向 ℓ），得

$$\ell = 37 - \frac{36}{\ell} \quad \Longrightarrow \quad \ell^2 - 37\ell + 36 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\ell - 1)(\ell - 36) = 0.$$

根 $\ell = 1$ 因 $\ell \geq 2$ 而被排除，所以

$$\ell = 36.$$

验算

- 当 $k = 6\sqrt{2} \approx 8.485$ 时，各项为 $2, -9.515, 12.269, 5.551, 2, \ldots$；当 $k = -6\sqrt{2}$ 时，各项为 $2, -26.485, -7.126, -3.433, 2, \ldots$。两者都在四步之后重复。
- 因式 $k^2 - 72$ 有一个简洁的含义：映射 $u \mapsto (ku - 36)/u$ 对应矩阵 $\begin{pmatrix} k & -36 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，其迹（trace）为 k，行列式（determinant）为 36。它的特征值（eigenvalues）是 $6e^{\pm i\theta}$，其中 $k = 12\cos\theta$；当 $\theta = \pi/4$ 或 $3\pi/4$ 时，它的四次方是单位矩阵（identity）的倍数。这给出 $k = \pm 6\sqrt{2}$，而 $\theta = \pi/2$ 则给出周期为 2 的 $k = 0$。
- 当 $k = 37$ 时：$u_2 = 19$、$u_3 \approx 35.105$、$u_4 \approx 35.975$、$u_5 \approx 35.9993$，各项明显趋近 36，而不是 1。

常见错误

- 在 (b) 中答 $k = 0, 20$，或在 (c) 中把四个根全部写上。题目问的是周期 2 和周期 4，而按这个意思，常数数列的周期并不是 2。
- 除了 $\ell = 36$ 之外，把 $\ell = 1$ 也当作答案。(ii) 前半部分得出的界 $u_n \geq 2$，正是用来排除它的。
- 令 $n \to \infty$ 时没有指出 $\ell \neq 0$，而这是 $36/u_n \to 36/\ell$ 成立所必需的。

STEP 之外

映射 $u \mapsto (ku - 36)/u$ 是一个莫比乌斯变换（Möbius transformation），而这类映射的复合，对应 2×2 矩阵的乘法。这就是为甚么周期性归根究底取决于两个特征值之比是否单位根（root of unity）。当 $k = 37$ 时，两个不动点（fixed points）1 和 36 的表现并不相同：36 会吸引附近的项，而 1 则会排斥它们，这一点可以从 $|f'(\ell)| = 36/\ell^2$ 看出。这是不动点迭代（fixed-point iteration）和数列收敛（convergence）理论的起点，Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析学入门教材）对此有严格的论述。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以几何直观讲解复分析）中，有一章精彩地讲述莫比乌斯变换及其分类。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。