详细解答

STEP I 2006，第 9 题

力学 · 连接质点

> **STEP I 2006，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q9

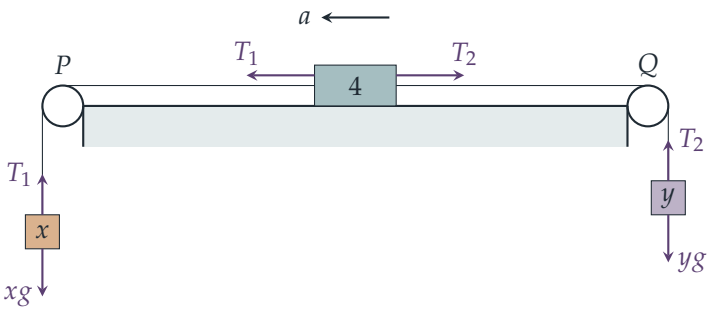
关键思路

整个运动分为两个阶段，每个阶段的加速度都是常数。两条绳子都连着的时候，三个物体组成的系统作为一个整体运动，由两个悬挂重物的重量之差驱动。绳子剪断之后，只有较轻的质点拉着方块，而且拉力与运动方向相反，所以方块作匀减速运动。剪断一刻的速率把两个阶段连接起来，而约束条件（constraint）$x + y = 6$ 让我们可以把一切都用 y 表示。

解答

模型

我们把方块和两个悬挂的物体都视为质点（particle），绳子视为轻而不可伸长（light and inextensible），桌面和滑轮（pulley）视为光滑（smooth）。由于 $x > y$，方块向 P 移动，质量为 x 的质点下降，质量为 y 的质点上升。设跨过 P 和 Q 的绳子的张力（tension）分别为 T_1 和 T_2。



第一阶段：两条绳子都连着

设共同的加速度为 a_1（方块向 P，质点 x 向下，质点 y 向上）。对每个物体应用牛顿第二定律（Newton's second law），得

$$\begin{aligned} xg - T_1 &= xa_1, \\ T_1 - T_2 &= 4a_1, \\ T_2 - yg &= ya_1. \end{aligned}$$

三式相加便消去张力：

$$(x-y)g = (x+y+4)a_1 = 10a_1, \qquad \text{所以} \qquad a_1 = \frac{(x-y)g}{10} = \frac{(6-2y)g}{10},$$

其中用了 $x = 6 - y$。这个值是正数，因为 $y < x$ 表示 $y < 3$。

方块由静止出发，以恒定加速度运动，在时间 t_1 内走过距离 d，并达到速率 V，其中

$$d = \tfrac{1}{2}a_1 t_1^2, \qquad V^2 = 2a_1 d.$$

因此

$$t_1 = \sqrt{\frac{2d}{a_1}} = \sqrt{\frac{20d}{(6-2y)g}} = \sqrt{\frac{d}{5g}}\,\frac{10}{\sqrt{6-2y}}, \qquad V = \sqrt{\frac{(6-2y)gd}{5}}.$$

第二阶段：剪断之后

现在 $T_1 = 0$。方块仍然以速率 V 向 P 移动，质量为 y 的质点也仍然以速率 V 上升。只有跨过 Q 的绳子作用于方块，并把它拉回 Q 的方向。设减速度（deceleration）为 a_2。于是

$$\begin{aligned} T_2 &= 4a_2 \quad \text{（方块），} \\ yg - T_2 &= ya_2 \quad \text{（质点 } y\text{，上升时减速），} \end{aligned}$$

所以

$$a_2 = \frac{yg}{4+y}.$$

? **想一想** 我们怎样知道跨过 Q 的绳子在剪断之后仍然保持拉紧?

假如绳子松弛了，质点便会以 g 减速，而方块则会保持原有速率。绳子拉紧时，张力为 $T_2 = 4a_2 = 4yg/(4+y) > 0$，并无矛盾，而且共同的减速度 a_2 小于 g。所以绳子确实保持拉紧，方块和质点一起运动，直至停下为止。

方块再经过以下时间便会静止：

$$t_2 = \frac{V}{a_2} = \sqrt{\frac{(6-2y)gd}{5}} \cdot \frac{4+y}{yg}$$
$$= \sqrt{\frac{d}{5g}}\sqrt{6-2y}\left(1+\frac{4}{y}\right),$$

其中我们用了 $\sqrt{(6-2y)gd/5}\,/\,g = \sqrt{d/(5g)}\sqrt{6-2y}$ 和 $(4+y)/y = 1+4/y$。

总时间

方块在第二阶段结束时首次回复静止，所以总时间为

$$t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{d}{5g}}\left[\frac{10}{\sqrt{6-2y}} + \left(1+\frac{4}{y}\right)\sqrt{6-2y}\right] = \sqrt{\frac{d}{5g}}\,\mathrm{f}(y),$$

正是所求。

f 的驻值

符合物理情况的范围是 $0 < y < 3$。设 $u = 6-2y$，则 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}y = -2$，而

$$\mathrm{f}(y) = 10u^{-1/2} + \left(1+\frac{4}{y}\right)u^{1/2}.$$

求导，并对第二项使用积法则（product rule），得

$$\mathrm{f}'(y) = 10\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)u^{-3/2}(-2) - \frac{4}{y^2}u^{1/2} + \left(1+\frac{4}{y}\right)\tfrac{1}{2}u^{-1/2}(-2)$$
$$= \frac{10}{u^{3/2}} - \frac{4u^{1/2}}{y^2} - \frac{y+4}{y\,u^{1/2}}.$$

两边乘以 $y^2u^{3/2}$（在 $0<y<3$ 时为正数），条件 $\mathrm{f}'(y)=0$ 便化为

$$10y^2 - 4u^2 - (y^2+4y)u = 0.$$

代入 $u = 6-2y$：

$$10y^2 - 4(36-24y+4y^2) - (6y^2 - 2y^3 + 24y - 8y^2) = 0$$
$$2y^3 - 4y^2 + 72y - 144 = 0$$
$$2(y-2)(y^2+36) = 0.$$

由于 $y^2+36>0$，唯一的解是

$$y = 2,$$

它位于 $0<y<3$ 之内（并给出 $x=4$）。

因为当 $y\to 0^+$ 和 $y\to 3^-$ 时 $\mathrm{f}(y)\to\infty$，这个唯一的驻点（stationary point）就是极小值：$\mathrm{f}(2) = 10/\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$，所以回复静止所需的最短时间是 $8\sqrt{2d/(5g)}$。

验算

- 以数值方法逐步模拟运动（时间步长 $2\times10^{-6}\,\mathrm{s}$），随机选取 $y\in(0,3)$ 和 d，所得结果与 $\sqrt{d/(5g)}\,\mathrm{f}(y)$ 吻合至五位有效数字；例如取 $y=1.671$、$d=0.581$，并用 $g=9.8$，两种方法都得出 $1.27096\,\mathrm{s}$。
- f 的数值导数在 $(0,3)$ 上恰好变号一次，就在 $y=2$，而 $\mathrm{f}(2)=11.3137\ldots=8\sqrt{2}$。
- 极限情况合乎情理：当 $y\to3$ 时，两边的质量几乎平衡，$a_1\to0$，第一阶段需时无限长；当 $y\to0$ 时，剪断之后没有任何东西令方块减速，所以第二阶段需时无限长。

常见错误

- 在第二阶段使用质量 $4+x+y$：绳子一经剪断，质量为 x 的质点便不再属于这个系统。
- 忘记质量为 y 的质点在剪断之后仍以速率 V 向上运动，因而把第二阶段当作由静止开始。
- 对 $\sqrt{6-2y}$ 求导时漏掉 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}y=-2$。

STEP 之外

把运动分成若干阶段，再以速度的连续性把它们连接起来，正是分段定义的动力学（piecewise-defined dynamics）背后的基本想法；这个想法会在冲力（impulsive forces）以及控制问题中再次出现，后者研究的是某个力何时开启、何时关闭。问哪一个 y 值令时间最短，则是初尝力学中的最优化（optimisation），日后会发展成变分法（calculus of variations），最速降线（brachistochrone）就是经典例子。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对连接体和约束力有仔细的讨论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。