详细解答

STEP I 2006，第 8 题

纯数学 · 三维向量

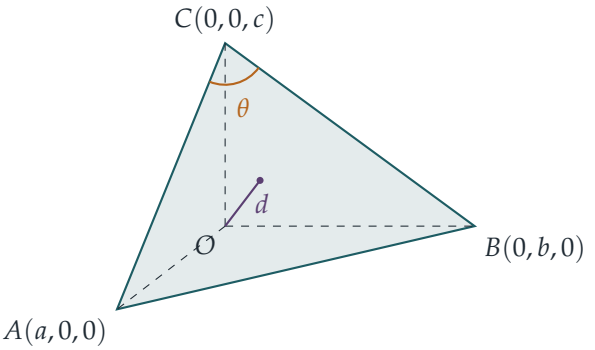
STEP I 2006，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/06-s1-q8

关键思路

四面体（tetrahedron）$OABC$ 在 O 处有三条互相垂直的棱，所以若以 OAB 为底，体积便很容易求出。同一个立体亦可以看成以 ABC 为底，这时的高正好就是我们要求的距离 d。用两种方法计算体积，便得到一条关于 d 的方程，前提是我们知道 ABC 的面积。这个面积可由 C 处的角求得，而该角则由纯量积（scalar product）给出。



解答

第 (i) 部分

取位于平面 $z = 0$ 上的三角形 OAB 为底。由于 OA 和 OB 分别沿 x 轴和 y 轴，角 AOB 是直角，所以

$$\text{面积}OAB = \tfrac{1}{2}ab.$$

高是 C 到平面 $z=0$ 的距离，即 c，因为 OC 沿 z 轴，故与该平面垂直。因此

$$V = \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{2}ab \times c = \frac{abc}{6}.$$

第 (ii) 部分

角 ACB 是向量（vector）$\overrightarrow{CA}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 之间的夹角：

$$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -c \end{pmatrix}.$$

它们的纯量积是 $0+0+c^2 = c^2$，而长度分别是 $\sqrt{a^2+c^2}$ 和 $\sqrt{b^2+c^2}$。所以

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\,|\overrightarrow{CB}|} = \frac{c^2}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}},$$

这就是所要求的结果。

要求面积，我们需要 $\sin\theta$。由于 $0<\theta<\pi$，$\sin\theta>0$，所以

$$\begin{aligned}\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} &= \sqrt{\frac{(a^2+c^2)(b^2+c^2)-c^4}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}} \\ &= \frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}},\end{aligned}$$

因为展开 $(a^2+c^2)(b^2+c^2)$ 后，c^4 项互相抵消。

想一想 哪一条三角形面积公式切合我们现有的资料?

我们知道两条边 CA 和 CB，以及它们之间的夹角 θ，所以使用 $\frac{1}{2}CA\cdot CB\sin\theta$。那些麻烦的平方根刚好约去：

$$\text{面积}ABC = \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}\cdot\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

令人欣喜的是，答案对 a、b、c 是对称的，而这也是必然的：三角形 ABC 并不在乎我们把哪一个顶点称为 C。

距离 d

现在把 ABC 看成同一个四面体的底。它的高是对面的顶点 O 到 ABC 所在平面的垂直距离，即 d。由于体积与我们选哪一个面作底无关，由第 (i) 部分和第 (ii) 部分可得

$$\frac{abc}{6} = \tfrac{1}{3}\times\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\times d, \qquad \text{所以} \qquad d = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}.$$

两边平方后取倒数（各项均为正数），

$$\frac{1}{d^2} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

其中分子的每一项都除以 $a^2b^2c^2$。这就是所要求的结果。

验算

- 取 $a = b = c = 1$。这时 ABC 是边长为 $\sqrt{2}$ 的等边三角形，面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$，与 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 吻合。该平面是 $x + y + z = 1$，与 O 的距离为 $1/\sqrt{3}$，而确实有 $1/d^2 = 3$。
- 取 $a = 1$、$b = c = 2$，由公式得体积为 $\frac{2}{3}$，面积为 $\sqrt{6} \approx 2.449$，以及 $d = 2/\sqrt{6} \approx 0.8165$，所以 $1/d^2 = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$。
- 数值验证：随机选取 10 000 组 (a, b, c)，体积（用纯量三重积（scalar triple product）计算）、面积（用向量积（cross product）计算）和 d（直接找出垂足的位置来计算）全部与公式吻合，误差在 10^{-12} 以内。

常见错误

- 把 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 配搭使用：方向混乱会令纯量积的正负号颠倒，得出的是 θ 的补角。
- 忘记了以 ABC 为底时，高是由 O 到该平面的垂线，而不是任何一条棱的长度。

STEP 之外

通过 A、B、C 的平面是 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$，其法向量（normal）为 $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$，利用一般的点到平面距离公式，一行便可求出 d。面积的结果是三维的毕氏定理（Pythagoras' theorem），即德古阿定理（de Gua's theorem）：ABC 面积的平方，等于在 O 处三个直角面的面积平方之和，因为 $\frac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$ 正好就是这个和。这两个想法都源自向量积和行列式（determinant），在大学第一门线性代数（linear algebra）课程的初段便会学到；Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门教科书）是认识它们的好地方。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。