详细解答

STEP I 2006，第 7 题

纯数学 · 含绝对值符号的积分

> **STEP I 2006，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q7

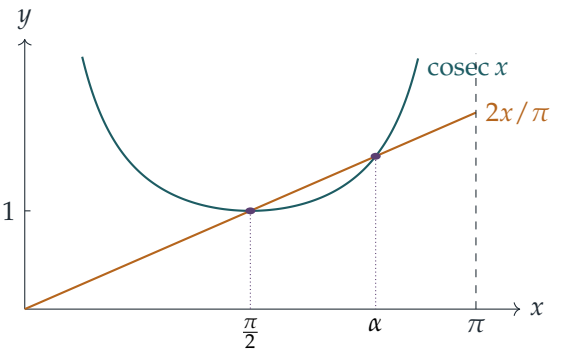
关键思路

把 $x\sin x = \pi/2$ 两边除以 $\frac{\pi}{2}\sin x$（它在 $(0,\pi)$ 上为正），方程便化为 $\operatorname{cosec} x = 2x/\pi$，所以方程的根（root）就是一条直线与一条 U 形曲线相交之处，而一条直线与一条凸（convex）曲线最多只能相交两次。至于积分，处理绝对值（modulus）的全部窍门，就是找出绝对值符号内的式子在何处变号，在该处把积分范围分开，然后以正确的正负号对每一段分别积分。

解答

第 (i) 部分：草图与根

在 $0 < x < \pi$ 上，$\operatorname{cosec} x$ 在两端均趋向 $+\infty$，关于 $x = \pi/2$ 对称，并在该处取得最小值 1。直线 $y = 2x/\pi$ 由 $(0,0)$ 伸延至 $(\pi,2)$，并通过 cosec 曲线的最低点 $(\pi/2,1)$。



由于在 $(0,\pi)$ 上 $\sin x > 0$,

$$x\sin x = \frac{\pi}{2} \iff \frac{1}{\sin x} = \frac{2x}{\pi},$$

所以方程的根就是草图中各交点的 x 坐标。其中一个根一眼便可看出：$x = \pi/2$，因为 $\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$。

为了确定恰好有两个根，设 $h(x) = \operatorname{cosec} x - 2x/\pi$。那么

$$h''(x) = \operatorname{cosec} x\,(\operatorname{cosec}^2 x + \cot^2 x) > 0 \quad \text{于}(0,\pi),$$

所以 h 是严格凸（strictly convex）的，而严格凸函数最多只有两个零点。（假如它有三个零点 $a < b < c$，那么 b 严格地位于 a 与 c 之间，但 $h(b)$ 却落在连接 $(a,0)$ 与 $(c,0)$ 的弦（chord）上，而不是严格地在弦的下方。）现在 $h'(\pi/2) = -\cot\frac{\pi}{2}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} = -\frac{2}{\pi} < 0$，所以 h 在 $\pi/2$ 的右侧附近为负，而当 $x \to \pi^-$ 时 $h(x) \to +\infty$。根据连续性（continuity），h 有一个零点 α，满足 $\pi/2 < \alpha < \pi$。因此方程恰好有两个根，即 $\pi/2$ 和 α，而 α 是较大的一个。

第 (i) 部分：积分

由草图（以及上述关于凸性的论证）可知，cosec 曲线在两个根之间位于直线下方，而在 α 之后则位于直线上方。把 $\operatorname{cosec} x \leqslant 2x/\pi$ 乘以正数 $\frac{\pi}{2}\sin x$，即得

$$x\sin x - \frac{\pi}{2} \geq 0 \text{ 于 } \left[\tfrac{\pi}{2},\alpha\right], \qquad x\sin x - \frac{\pi}{2} \leq 0 \text{ 于} [\alpha,\pi].$$

想一想 我们应怎样处理绝对值符号?

我们在变号之处 α 把积分分开，而在第二段上则对该式子的相反数积分。

运用分部积分法（integration by parts），取 $u = x$，$\mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x$,

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x - x\cos x.$$

所以 $x\sin x - \pi/2$ 的一个原函数（antiderivative）是

$$F(x) = \sin x - x\cos x - \frac{\pi x}{2},$$

而所求的积分是

$$I = [F(x)]_{\pi/2}^{\alpha} - [F(x)]_{\alpha}^{\pi} = 2F(\alpha) - F\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - F(\pi).$$

这三个值分别是

$$F(\alpha) = \sin\alpha - \alpha\cos\alpha - \frac{\alpha\pi}{2},$$

$$F\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 - \frac{\pi^2}{4},$$

$$F(\pi) = 0 - \pi(-1) - \frac{\pi^2}{2} = \pi - \frac{\pi^2}{2}.$$

因此

$$I = 2\sin\alpha - 2\alpha\cos\alpha - \alpha\pi - 1 + \frac{\pi^2}{4} - \pi + \frac{\pi^2}{2}$$
$$= 2\sin\alpha + \frac{3\pi^2}{4} - \alpha\pi - \pi - 2\alpha\cos\alpha - 1,$$

这正是所要求的结果。

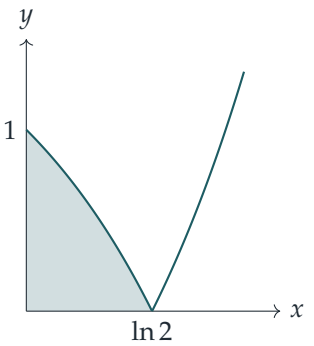
第 (ii) 部分

> **想一想** 两个绝对值符号之中，哪一个在这里才真正起作用?

在正 x 轴上，$x \geq 0$，所以 $\mathrm{e}^x \geq 1$，内层的绝对值符号并无影响：$|\mathrm{e}^x - 1| = \mathrm{e}^x - 1$。因此曲线就是

$$y = |\mathrm{e}^x - 2| \qquad (x \geq 0).$$

当 $0 \leq x \leq \ln 2$ 时，它等于 $2 - \mathrm{e}^x$，由 $x = 0$ 处的 $y = 1$ 下降至 $x = \ln 2$ 处的 $y = 0$；当 $x \geq \ln 2$ 时，它等于 $\mathrm{e}^x - 2$，无止境地上升。



所以曲线只在 $x = \ln 2$ 处触及 x 轴，而由正 x 轴、y 轴和曲线所围成的区域，就只有 $0 \leq x \leq \ln 2$ 上的阴影部分（过了 $\ln 2$ 之后，曲线一直向上攀升，再围不成任何封闭区域）。它的面积是

$$\int_0^{\ln 2} (2 - \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \Big[2x - \mathrm{e}^x\Big]_0^{\ln 2} = (2\ln 2 - 2) - (0 - 1)$$
$$= 2\ln 2 - 1 = \ln 4 - 1,$$

正如所求。

验算

用二分法（bisection）可得 $\alpha \approx 2.4433$，代入 (i) 的公式后得出约 0.61343；把森逊法则（Simpson's rule）直接应用于 $[\pi/2, \pi]$ 上的 $|x\sin x - \pi/2|$，所得的值在小数点后 14 位

以内完全相同。在 $(0, \pi)$ 上作格点搜索（grid search），发现 $x \sin x - \pi/2$ 恰好变号两次，分别在 1.5708 和 2.4433 附近。在 (ii) 中，$\ln 4 - 1 \approx 0.38629$，同样与数值积分的结果吻合。作为对 (i) 中正负号的合理性检查，答案必须为正，而它确实为正。

常见错误

- 没有在 α 处分开，便直接在整个 $[\pi/2, \pi]$ 上对 $x \sin x - \pi/2$ 积分：这样得出的是有向面积（signed area）（这里是负数），而不是绝对值的积分。
- 遗漏了 $x = \pi/2$ 这个根，因为直线刚好通过 cosec 曲线的最低点，图形看起来可能像是相切。其实并非相切：曲线在该处的斜率是 0，而直线的斜率是 $2/\pi$，所以两者是相交而过的。
- 在 (ii) 中，把两个绝对值符号都保留下来，结果分出过多的情况。应先利用 $x \geq 0$ 确定 $\mathrm{e}^x - 1$ 的正负号。

STEP 之外

根 α 没有闭合形式（closed form），但我们仍然可以用它把积分准确地表达出来：这是分析学（analysis）中常见的情况，即一个量是由一条方程而非一条公式所确定的。严格凸函数与一条直线最多相交两次，这只是凸性众多精妙推论之一；凸性也是延森不等式（Jensen's inequality）以及最优化（optimisation）中许多理论的基础。Bartle 与 Sherbert 合著的 *Introduction to Real Analysis*（实分析入门）对连续性、介值定理（intermediate value theorem）和凸函数都有严谨细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。