详细解答

STEP I 2006，第 6 题

纯数学 · 佩尔方程的变换

> **STEP I 2006，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q6

关键思路

每一部分都在问：某个线性坐标变换（linear change of coordinates）会否保持一个二次式（quadratic expression）不变。直接的做法是代入、展开，然后比较 a^2、ab 和 b^2 的系数（coefficients）。背后其实有一幅更简洁的图像：$x^2 - 2y^2$ 是数 $x + y\sqrt{2}$ 的“大小”，而乘以 $3 + 2\sqrt{2}$（其大小为 $9 - 8 = 1$）不会改变这个大小。看通这一点，你就确切知道 (iii) 中的映射（map）该如何构造。

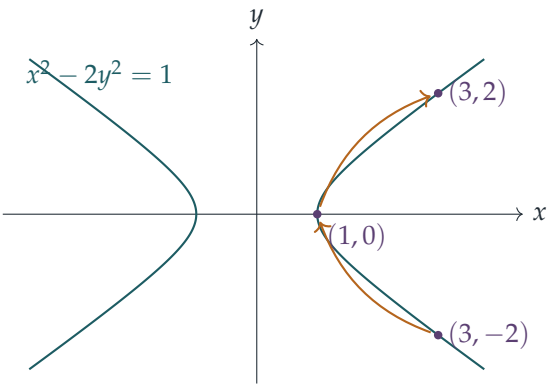
解答

第 (i) 部分

设 $a^2 - 2b^2 = 1$。则

$$\begin{aligned}(3a + 4b)^2 - 2(2a + 3b)^2 &= (9a^2 + 24ab + 16b^2) - 2(4a^2 + 12ab + 9b^2)\\ &= a^2 - 2b^2\\ &= 1,\end{aligned}$$

所以 $(3a + 4b,\ 2a + 3b)$ 位于 $x^2 - 2y^2 = 1$ 上，正如所求。事实上，头两行是一条恒等式（identity），对任何 a 和 b 都成立：这个映射在每一处都保持 $x^2 - 2y^2$ 不变，而不仅是在曲线上。



这个映射把点沿着右边的分支推移：$(3,-2) \mapsto (1,0) \mapsto (3,2) \mapsto (17,12) \mapsto \cdots$。

第 (ii) 部分

设 $Ma^2 - Nb^2 = 1$。展开得

$$M(5a+6b)^2 - N(4a+5b)^2 = (25M-16N)a^2 + (60M-40N)ab + (36M-25N)b^2.$$

像点位于曲线上，当且仅当上式等于 $1 = Ma^2 - Nb^2$。减去 $Ma^2 - Nb^2$ 后，条件变成

$$\begin{aligned} 0 &= (24M-16N)a^2 + (60M-40N)ab + (36M-24N)b^2 \\ &= 4(3M-2N)(2a^2+5ab+3b^2) \\ &= 4(3M-2N)(2a+3b)(a+b). \end{aligned}$$

> **想一想** 我们真的需要 $3M = 2N$ 吗？会不会是其他因式等于零？

这个条件必须对曲线上每一点都成立。当 $M, N > 0$ 时，曲线 $Mx^2 - Ny^2 = 1$ 是一条双曲线（hyperbola），上面有无穷多个点。直线 $2x + 3y = 0$ 和 $x + y = 0$ 各自与它最多相交于两点，所以曲线上绝大部分的点都满足 $(2a+3b)(a+b) \neq 0$。因此我们需要 $3M - 2N = 0$。反过来说，若 $3M = 2N$，条件在每一点都成立。

所以 $3M = 2N$。于是 $2 \mid 3M$，故 M 是偶数。最小的选择是 $M = 2$，由此得 $N = 3$。最后验算一次：

$$2(5a+6b)^2 - 3(4a+5b)^2 = (50-48)a^2 + (120-120)ab + (72-75)b^2 = 2a^2 - 3b^2.$$

最小的正整数是 $M = 2$ 和 $N = 3$。

第 (iii) 部分

我们要找正整数，使得

$$(Pa+Qb)^2 - 3(Ra+Sb)^2 = a^2 - 3b^2 \quad \text{对任意} a, b,$$

这样必定能令曲线上每一点的像都位于曲线上。比较系数：

$$P^2 - 3R^2 = 1, \qquad PQ = 3RS, \qquad Q^2 - 3S^2 = -3.$$

第一条方程要求在 $x^2 - 3y^2 = 1$ 上找一个正整数点 (P, R)。最小的是 $(2,1)$，所以试取 $P = 2$，$R = 1$。第二条方程随即给出 $Q = \frac{3}{2}S$，而第三条变成 $\frac{9}{4}S^2 - 3S^2 = -3$，即 $S^2 = 4$。所以 $S = 2$ 而 $Q = 3$：

$$P = 2, \quad Q = 3, \quad R = 1, \quad S = 2.$$

验算：$(2a + 3b)^2 - 3(a + 2b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2 - 3a^2 - 12ab - 12b^2 = a^2 - 3b^2 = 1$。所以 $(2a + 3b,\ a + 2b)$ 位于 $x^2 - 3y^2 = 1$ 上。

想一想 这样的映射是从哪里来的?

写出 $(a + b\sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = (2a + 3b) + (a + 2b)\sqrt{3}$。$x + y\sqrt{3}$ 的范数（norm）$x^2 - 3y^2$ 具有积性（multiplicative），而 $2 + \sqrt{3}$ 的范数是 $4 - 3 = 1$，所以乘以它会保持范数不变。第 (i) 部分的原理相同，用的是 $3 + 2\sqrt{2}$。至于 (ii)，$(a\sqrt{2} + b\sqrt{3})(5 + 2\sqrt{6}) = (5a + 6b)\sqrt{2} + (4a + 5b)\sqrt{3}$，这就是 $2x^2 - 3y^2$ 这个形式在那里出现的原因。(iii) 还有其他正确答案：乘以 $(2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$ 会得出 $(7a + 12b,\ 4a + 7b)$。

验算

- 从 $x^2 - 3y^2 = 1$ 上的 $(1,0)$ 出发。重复施行 (iii) 的映射得出 $(2,1)$、$(7,4)$、$(26,15)$、$(97,56)$，每一个都满足 $x^2 - 3y^2 = 1$（例如 $26^2 - 3 \cdot 15^2 = 676 - 675 = 1$）。
- 对于 (ii)，$(1/\sqrt{2}, 0)$ 在 $2x^2 - 3y^2 = 1$ 上，并映射到 $(5/\sqrt{2},\ 4/\sqrt{2})$。于是 $2 \cdot \frac{25}{2} - 3 \cdot \frac{16}{2} = 25 - 24 = 1$。
- 在 $1 \le M, N < 30$ 的范围内作穷举搜索，并以每条双曲线上的实际点来测试，证实 $(2,3)$ 是最小的可行数对。

常见错误

- 在 (ii) 中，只令 ab 的系数为零，却没有检查 a^2 和 b^2 的系数是否随之等于 M 和 $-N$。在这题中它们确实如此，但这一点必须写出来证明。
- 没有给出理由就说“恒等式必须对所有 a, b 成立”，而题目其实只给出曲线上的点。你需要一个论证，例如上面的因式分解（factorisation），来排除其他因式等于零的可能。

STEP 之外

这些都是佩尔方程（Pell equations）$x^2 - dy^2 = 1$。它们的整数解由环（ring）$\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 中一个基本单位（fundamental unit）$x_1 + y_1\sqrt{d}$ 的幂生成，而这里的映射正是乘以这类单位。用矩阵的语言来说，每个映射都是一个保持某个二次型（quadratic form）不变的 2×2 整数矩阵，即某个“整正交群”（integral orthogonal group）的元素。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）有精彩的一整章，以连分数（continued fractions）处理佩尔方程。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。