详细解答

# STEP I 2006，第 5 题

纯数学 · 代换积分法

**STEP I 2006，第 5 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/06-s1-q5

## 关键思路

两个被积函数（integrand）都含有一个棘手的平方根，而要消去线性式的平方根，最干净利落的方法就是把整个根式设为新变量。根式一旦消失，剩下的便是有理函数（rational function），而有理函数总可以用部分分式（partial fractions）来积分。在第 (ii) 部分，最好先把指数函数除去，使平方根变成某个线性式的根，然后同一招便能派上用场。

## 解答

### 第 (i) 部分

由于 $x > 4$，我们有 $2x+1 > 9$，故可取 $u = \sqrt{2x+1} > 3$。由 $u^2 = 2x+1$ 得

$$2u\,\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x, \qquad \text{所以} \qquad \mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}u,$$

以及

$$x - 4 = \frac{u^2-1}{2} - 4 = \frac{u^2-9}{2}.$$

代入后，

$$\int \frac{3}{(x-4)\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{\frac{1}{2}(u^2-9)\,u}\,u\,\mathrm{d}u = \int \frac{6}{u^2-9}\,\mathrm{d}u.$$

来自 $\mathrm{d}x$ 的因子 $u$ 恰好把平方根约去，这正是这个代换（substitution）奏效的原因。现在 $u^2 - 9 = (u-3)(u+3)$，而

$$\frac{6}{(u-3)(u+3)} = \frac{1}{u-3} - \frac{1}{u+3},$$

你可以把右边通分来验证：分子是 $(u+3)-(u-3)=6$。因此

$$\int \frac{6}{u^2-9}\,\mathrm{d}u = \ln(u-3)-\ln(u+3)+K = \ln\left(\frac{u-3}{u+3}\right)+K,$$

这里无需加上绝对值符号，因为 $u>3$ 令 $u-3$ 和 $u+3$ 均为正数。把 $u=\sqrt{2x+1}$ 代回，得

$$\int \frac{3}{(x-4)\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{2x+1}+3}\right)+K,$$

正是所求。

**第 (ii) 部分**

设 $I$ 为该积分。仿照第 (i) 部分，最自然的代换就是把平方根设为新变量：

$$w=\sqrt{\mathrm{e}^x+1}, \qquad w^2=\mathrm{e}^x+1.$$

于是 $2w\,\mathrm{d}w=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$，所以 $\mathrm{d}x=\dfrac{2w}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}w=\dfrac{2w}{w^2-1}\,\mathrm{d}w$。积分上下限变为

$$x=\ln 3:\ w=\sqrt{3+1}=2, \qquad x=\ln 8:\ w=\sqrt{8+1}=3.$$

因此

$$I=\int_2^3 \frac{2}{(w^2-1)\,w}\cdot\frac{2w}{w^2-1}\,\mathrm{d}w=\int_2^3\frac{4}{(w^2-1)^2}\,\mathrm{d}w.$$

? **想一想** 怎样才能不经冗长的计算，就把 $\dfrac{4}{(w^2-1)^2}$ 分解成部分分式?

从简单的分解式 $\dfrac{2}{w^2-1}=\dfrac{1}{w-1}-\dfrac{1}{w+1}$ 出发，把它平方：

$$\begin{aligned}\frac{4}{(w^2-1)^2} &= \frac{1}{(w-1)^2}-\frac{2}{(w-1)(w+1)}+\frac{1}{(w+1)^2}\\ &= \frac{1}{(w-1)^2}+\frac{1}{(w+1)^2}-\frac{1}{w-1}+\frac{1}{w+1},\end{aligned}$$

其中对中间一项再用了一次那个简单的分解式。现在每一项都可以一眼看出积分：

$$\int\frac{4}{(w^2-1)^2}\,\mathrm{d}w=-\frac{1}{w-1}-\frac{1}{w+1}-\ln\left(\frac{w-1}{w+1}\right)+C,$$

由于在积分范围内 $w\geq 2$，所以无需加上绝对值符号。代入上下限计算，

$$\begin{aligned}&\text{当}w=3: \quad -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}-\ln\tfrac{2}{4}=-\tfrac{3}{4}+\ln 2,\\ &\text{当}w=2: \quad -1-\tfrac{1}{3}-\ln\tfrac{1}{3}=-\tfrac{4}{3}+\ln 3.\end{aligned}$$

所以

$$I = \left(-\tfrac{3}{4} + \ln 2\right) - \left(-\tfrac{4}{3} + \ln 3\right) = \frac{7}{12} + \ln\frac{2}{3},$$

这就是要证明的结果。

你同样可以分两步来做：先设 $v = \mathrm{e}^x$（得出 $\int_3^8 \frac{2}{v^2\sqrt{v+1}}\,\mathrm{d}v$），然后设 $w^2 = v+1$；上面的单一代换则一次过完成了这两步。

## 验算

- 对 (i) 的答案求导：设 $u = \sqrt{2x+1}$，则 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}$，而 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\ln\frac{u-3}{u+3} = \frac{6}{u^2-9}$，所以导数为 $\frac{6}{u(u^2-9)} = \frac{3}{(x-4)\sqrt{2x+1}}$。
- 数值上，$\frac{7}{12} + \ln\frac{2}{3} \approx 0.58333 - 0.40547 = 0.17787$，而在 $[\ln 3, \ln 8]$ 上对原来的被积函数应用辛普森法则（Simpson's rule），得出 0.177868，两者有六位数字吻合。
- 就正负号和大小作一个合理性检查：(ii) 的被积函数为正，并在长度为 $\ln\frac{8}{3} \approx 0.98$ 的区间上由约 0.33 下降至约 0.08，所以答案略小于 0.2 正合预期。

## 常见错误

- 在 (ii) 中变换变量时忘记更改积分上下限，或把 $x$ 的上下限代入以 $w$ 表示的式子。
- 把 $\frac{4}{(w^2-1)^2}$ 只写成 $\frac{A}{(w-1)^2} + \frac{B}{(w+1)^2}$：重复因子还需要线性项 $\frac{1}{w-1}$ 和 $\frac{1}{w+1}$。
- 在 (i) 中得出 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ 而不是 $\mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}u$，结果留下一个多余的平方根。

## STEP 之外

两部分的答案都由对数和有理项组成，原因在于一条一般性的定理：每个有理函数都有初等原函数（elementary antiderivative），可藉部分分式由有理函数、对数和反正切函数（inverse tangent）构成；而任何关于 $x$ 和 $\sqrt{ax+b}$ 的有理被积函数，经代换 $u^2 = ax+b$ 后都会变成有理函数。把这个想法推广到二次式的根，便引出欧拉代换（Euler's substitutions）；而追问哪些积分不能以初等形式求出，则引出刘维尔（Liouville）的有限形式积分理论（integration in finite terms）。若想细致地了解积分及其背后的道理，可阅读 Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本实分析入门书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。