详细解答

STEP I 2006，第 4 题

纯数学 • 正多边形的面积

STEP I 2006，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

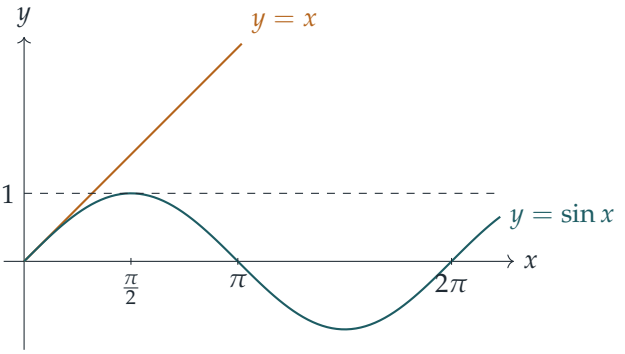
step.maths.org/questions/06-s1-q4

关键思路

直线 $y = x$ 是 $y = \sin x$ 在原点的切线（tangent），而正弦曲线向下弯离这条直线。单凭这一幅图，就同时得到不等式和近似式。至于多边形，把它分割成 n 个在中心相接的全等（congruent）等腰三角形；所有的量于是都变成半角 π/n 的三角运算，而不等式 $\sin x < x$ 原来正好决定了导数（derivative）的正负号。

解答

两个图像



两条曲线都通过原点，而且在该处的斜率（gradient）都是 1，因为在 $x = 0$ 时 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x = 1$。所以 $y = x$ 是正弦曲线在 O 的切线。

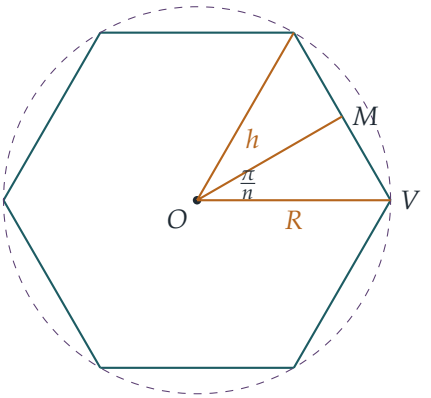
(i) 当 $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ 时，正弦曲线是凹的（concave）（$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sin x = -\sin x < 0$），所以它位于其在 O 的切线之下，由此得 $\sin x < x$。（等价的说法：$g(x) = x - \sin x$ 满足 $g(0) = 0$，且当

$0 < x < 2\pi$ 时 $g'(x) = 1 - \cos x > 0$，所以 g 在该区间上严格递增（strictly increasing）。）当 $x > \frac{\pi}{2}$ 时，我们有 $\sin x \le 1 < \frac{\pi}{2} < x$。所以对所有 $x > 0$ 都有 $x > \sin x$。

(ii) 由于这条直线是在 O 的切线，两个图像在原点附近几乎无法分辨：当 x 很小时，高度 $\sin x$ 与高度 x 非常接近，所以 $\dfrac{\sin x}{x} \approx 1$。（更精确的说法：由于当 $x > 0$ 时 $\sin x \ge x - \frac{x^3}{6}$，我们有 $1 - \frac{x^2}{6} \le \frac{\sin x}{x} < 1$。）

多边形的面积

把多边形的中心 O 与各顶点连起来。这样就把多边形分割成 n 个全等的等腰三角形，每个三角形的底等于一条边 $s = P/n$，在 O 的顶角为 $2\pi/n$。从 O 作垂线至一条边的中点 M；这条垂线平分顶角。



在直角三角形 OMV 中（其中 V 是一个顶点），在 O 的角是 π/n，且 $MV = \frac{1}{2}s$。所以由中心到一条边的距离 $h = OM$ 是

$$h = \frac{s/2}{\tan(\pi/n)} = \frac{P}{2n\tan(\pi/n)}.$$

这 n 个三角形每个的面积都是 $\frac{1}{2}sh$，所以多边形的面积是

$$A = n \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \frac{P}{n} \cdot \frac{P}{2n\tan(\pi/n)} = \frac{P^2}{4n\tan(\pi/n)},$$

正如所求。

面积随 n 增加

固定 P，把面积写成 $A = \dfrac{P^2}{4f(n)}$，其中 $f(n) = n\tan\dfrac{\pi}{n}$。由于当 $n \ge 3$ 时 $f(n) > 0$，A 递增恰好等同于 f 递减。根据积法则（product rule）和链式法则（chain rule），

$$f'(n) = \tan\frac{\pi}{n} + n\sec^2\frac{\pi}{n} \cdot \left(-\frac{\pi}{n^2}\right) = \tan\theta - \theta\sec^2\theta, \qquad \text{其中} \theta = \frac{\pi}{n}.$$

想一想 我们怎样判断 $\tan\theta - \theta\sec^2\theta$ 的正负号?

抽出正因子 $\sec^2\theta$，并利用 $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$:

$$f'(n) = \sec^2\theta\,(\sin\theta\cos\theta - \theta) = \tfrac{1}{2}\sec^2\theta\,(\sin 2\theta - 2\theta).$$

当 $n \geq 3$ 时, 我们有 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}$, 所以 $2\theta > 0$, 由第 (i) 部分得 $\sin 2\theta < 2\theta$。因此 $f'(n) < 0$, 并且

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}n} = -\frac{P^2 f'(n)}{4f(n)^2} > 0.$$

所以，在周界（perimeter）固定的情况下，面积随 n 增加而增加。

与外接圆比较

包含这个多边形的最小的圆是外接圆（circumcircle），它以 O 为圆心，并通过所有顶点。要看出更小的圆都不行，设各顶点为 $V_1, \ldots, V_n$，其中 $\overrightarrow{OV_k} = \mathbf{v}_k$，$|\mathbf{v}_k| = R$。由对称性可知 $\sum \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$，所以对任意一点 C，设 $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$，则有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |\mathbf{v}_k - \mathbf{c}|^2 = R^2 - \frac{2}{n}\,\mathbf{c}\cdot\sum_{k=1}^{n}\mathbf{v}_k + |\mathbf{c}|^2 = R^2 + |\mathbf{c}|^2 \geq R^2.$$

所以必有某个顶点与 C 的距离至少是 R，而以 C 为圆心并包含这个多边形的圆，半径至少是 R。外接圆半径（circumradius）是 $R = OV$，而由同一个直角三角形可得

$$\tfrac{1}{2}s = R\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad R = \frac{P}{2n\sin\theta}.$$

所以两个面积之比是

$$\frac{A}{\pi R^2} = \frac{P^2}{4n\tan\theta}\cdot\frac{4n^2\sin^2\theta}{\pi P^2} = \frac{n}{\pi}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\tan\theta} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\theta} = \frac{\sin 2\theta}{2\theta},$$

当中用到 $n/\pi = 1/\theta$。当 n 很大时，$2\theta = 2\pi/n$ 很小，所以由第 (ii) 部分可知这个比值约等于 1。

验算

对于正方形（$n = 4$，$\theta = \pi/4$），公式给出 $A = P^2/16$，这是正确的，因为每条边长 $P/4$；面积比是 $\sin(\pi/2)/(\pi/2) = 2/\pi \approx 0.637$，与单位圆内边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形吻合。对于六边形，这个比值是 $3\sqrt{3}/(2\pi) \approx 0.827$。我们用鞋带公式（shoelace formula）核对了 $n = 3, \ldots, 39$ 时的面积公式，用数值导数核对了 $f'(n) < 0$，并求得这个比值在 $n = 100$ 时是 0.99934，在 $n = 1000$ 时是 0.9999934。

常见错误

- 在直角三角形中用了整个顶角 $2\pi/n$，而不是半角 π/n。
- 对 $\tan(\pi/n)$ 求导时，漏掉链式法则带来的因子 $-\pi/n^2$。
- 声称“因为 $\tan\theta \approx \theta$”，所以 $\tan\theta < \theta\sec^2\theta$：近似式不能决定正负号。能决定正负号的是精确的不等式 $\sin 2\theta < 2\theta$。

STEP 之外

极限（limit）$\sin x/x \to 1$ 正是令 $\sin x$ 的导数等于 $\cos x$ 的事实，而大学的第一门分析（analysis）课程会从 sin 的定义出发严格地证明它，而不是靠一幅图。这个单调性（monotonicity）结果，让我们从离散的角度一窥等周不等式（isoperimetric inequality）：在所有长度给定的闭曲线之中，圆所围的面积最大，而多边形的面积会递增并趋向圆的面积值 $P^2/(4\pi)$。如想看极限和导数的严格论述，可以读 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。