详细解答

STEP I 2006，第 3 题

纯数学 · 多项式的根

> **STEP I 2006，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q3

关键思路

着眼于图像，而不是公式。一条曲线若起初在轴的下方，最后又必须到达轴的上方，就一定会穿过轴；而 $x = 0$ 处的值（即常数项）告诉你曲线在原点处位于轴的哪一侧。对于三次函数（cubic），关键在于转向点（turning point）：曲线与轴相交三次，当且仅当它的局部极大值（local maximum）在轴的上方，而局部极小值（local minimum）在轴的下方。

解答

第 (i) 部分

设 $f(x) = x^2 + bx + c$。其图像是一条开口向上的抛物线（parabola），所以当 $x \to \pm\infty$ 时，$f(x) \to +\infty$。若 $c < 0$，则 $f(0) = c < 0$：曲线在 $x = 0$ 处位于轴的下方。

由于 f 连续（continuous），当 x 是绝对值很大的负数时取正值，而在 0 处取负值，所以它在 $(-\infty, 0)$ 内某处穿过轴。同理，它在 $(0, \infty)$ 内再穿过轴一次。这两个根（root）分别位于 0 的两侧，所以它们并不相同。二次方程（quadratic）最多有两个根，因此该方程恰好有两个相异实根，一负一正。所以 $c < 0$ 是*充分*条件（sufficient condition）。

它*并非必要*条件（necessary condition）。例如，$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ 有相异实根 1 和 2，但 $c = 2 > 0$。（既必要又充分的条件是 $b^2 > 4c$；当 $c < 0$ 时，这个条件自动成立，因为 $b^2 \geq 0 > 4c$。）

第 (ii) 部分

我们断言：该方程有两个相异正根，当且仅当

$$b^2 > 4c, \qquad b < 0, \qquad c > 0.$$

必要性。假设两根为 $\alpha \neq \beta$，其中 $\alpha, \beta > 0$。那么 $x^2 + bx + c = (x - \alpha)(x - \beta)$，所以

$$c = \alpha\beta > 0, \qquad b = -(\alpha + \beta) < 0, \qquad b^2 - 4c = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2 > 0.$$

充分性。若 $b^2 > 4c$，则两根 α, β 是相异实数。两根之积为 $c > 0$，所以它们同号。两根之和为 $-b > 0$，所以它们同为正数。

> **想一想** 为甚么单靠 $b < 0$ 和 $c > 0$ 并不足够?

考虑 $x^2 - x + 1$：这里 $b = -1 < 0$ 而 $c = 1 > 0$，但 $b^2 - 4c = -3 < 0$，所以根本没有实根。从图像来看，$c > 0$ 使曲线在 $x = 0$ 处位于轴的上方，而 $b < 0$ 使顶点（vertex）位于 $x = -\frac{b}{2} > 0$。我们还需要顶点位于轴的下方：顶点的高度是 $c - \frac{b^2}{4}$，它为负数当且仅当 $b^2 > 4c$。三个条件缺一不可。

第 (iii) 部分

设 $g(x) = x^3 + px + q$，所以 $g'(x) = 3x^2 + p$。实系数三次方程连重数（multiplicity）计算共有三个根，而它的非实根以共轭复数（complex conjugate）成对出现。另外请注意，在两种情况下都有 $g(0) = q < 0$。

$p > 0$、$q < 0$ 的情况。 这里对所有 x 都有 $g'(x) = 3x^2 + p > 0$，所以 g 严格递增（strictly increasing），恰好有一个实根。由于 $g(0) = q < 0$ 而 g 递增，这个根是正数。余下的两个根是一对非实数的共轭复数。

所以有一个实根，它是正数而且是单根（simple root），另有两个非实数的共轭复根。

$p < 0$、$q < 0$ 的情况。 设 $p = -3a^2$，其中 $a > 0$，即 $a = \sqrt{-p/3}$。那么 $g'(x) = 3(x^2 - a^2)$，所以 g 在 $(-\infty, -a]$ 上递增，在 $[-a, a]$ 上递减，在 $[a, \infty)$ 上递增。在 $x = -a$ 处有局部极大值，在 $x = a$ 处有局部极小值，并且

$$g(-a) = -a^3 + 3a^3 + q = 2a^3 + q, \qquad g(a) = a^3 - 3a^3 + q = q - 2a^3.$$

由于 $q < 0$，局部极小值 $g(a)$ 是负数。在 $[0, a]$ 上，g 由 $g(0) = q < 0$ 开始递减，所以在该区间内没有根。在 $[a, \infty)$ 上，它由 $g(a) < 0$ 递增至 $+\infty$，所以恰好有一个大于 a 的根，这个根是正数。任何其他实根必定位于 $(-\infty, -a]$ 或 $(-a, 0)$ 内，所以是负数；而这样的根是否存在，只取决于局部极大值 $g(-a)$ 的正负。

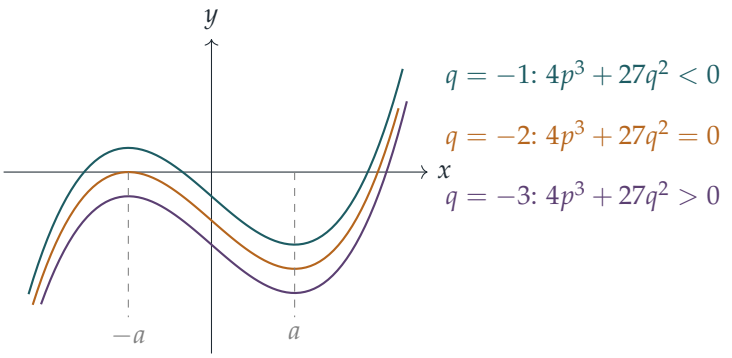
想一想 $g(-a)$ 的正负与 $4p^3+27q^2$ 有甚么关系?

把两个转向点的函数值相乘:

$$g(-a)\,g(a)=(q+2a^3)(q-2a^3)=q^2-4a^6=q^2-4\left(-\frac{p}{3}\right)^3=\frac{4p^3+27q^2}{27}.$$

由于 $g(a)<0$，$g(-a)$ 的正负与 $4p^3+27q^2$ 的正负相反。共有三种情况。

- $4p^3+27q^2>0$。此时 $g(-a)<0$，所以在整个 $(-\infty,a]$ 上都有 $g<0$（它先递增至负值 $g(-a)$，然后递减）。唯一的实根就是那个正根。与之前一样，有一个正实根和两个非实数的共轭复根。
- $4p^3+27q^2=0$。此时 $g(-a)=0$ 且 $g'(-a)=0$，所以 $x=-a$ 是重根（repeated root）。由于各根之和为 0（方程没有 x^2 项），第三个根是 $2a$。三个根是 $-a$、$-a$、$2a$：一个负的二重根和一个正的单根，全部都是实数。
- $4p^3+27q^2<0$。此时 $g(-a)>0$。由于当 $x\to-\infty$ 时 $g(x)\to-\infty$，在 $(-\infty,-a)$ 内有一个根。由于 $g(-a)>0>g(0)$，在 $(-a,0)$ 内还有一个根。连同大于 a 的那个根，共有三个相异实根：两负一正。



草图显示了 $q=-1$、-2、-3 时的 $y=x^3-3x+q$（即 $p=-3$，$a=1$）：把局部极大值提升至越过轴，一个实根就变成三个。

在 $q<0$ 的每一种情况下，都恰好有一个正根；这与各根之积为 $-q>0$ 一致。

验算

- 取 $p=-3$、$q=-1$，得 $4p^3+27q^2=-108+27=-81<0$，而数值计算所得的根约为 -1.532、-0.347 和 1.879：两负一正，与预测相符。
- 取 $p=-3$、$q=-2$：$4p^3+27q^2=0$，而 $x^3-3x-2=(x+1)^2(x-2)$，得出根 $-1,-1,2$。

- 在每种情况下，对数千组随机的 (p,q) 使用数值求根程序，并以随机的 (b,c) 检验 (ii) 中的条件，结果与上述每一项结论都吻合。

常见错误

- 在 (ii) 中只给出 $b<0$ 和 $c>0$（这两个条件只保证如果根是实数，它们便是正数），而忘记了 $b^2>4c$。
- 在 (ii) 中只证明必要性，或只证明充分性。“必要且充分”需要两个方向都证明。
- 在 (iii) 中忘记了边界情况 $4p^3+27q^2=0$，此时有重根。

STEP 之外

$-(4p^3+27q^2)$ 这个量是三次式 x^3+px+q 的判别式（discriminant），与 b^2-4ac 完全对应。它等于各根两两之差的平方之积，所以它为零当且仅当有重根，而它为正数当且仅当三个根都是实数且互不相同。判别式，以及根与系数之间的关系，通向伽罗瓦理论（Galois theory）以及“哪些方程可用根式求解（solvable by radicals）”这个问题。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）是很好的入门读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。