详细解答

STEP I 2006，第 2 题

纯数学 · 面积与最优化

> **STEP I 2006，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q2

关键思路

用一个数来确定系绳点的位置，即它与其中一个角的距离 x，然后跟着绳子看它怎样绕过谷仓。这样，吃草区域便分成一个半圆（semicircle）和四个四分之一圆（quarter-circle），它们的半径都是 x 的简单线性函数。因此 A 是 x 在一个闭区间（closed interval）上的二次函数（quadratic），题目的两个部分都归结为求它的最大值和最小值。

解答

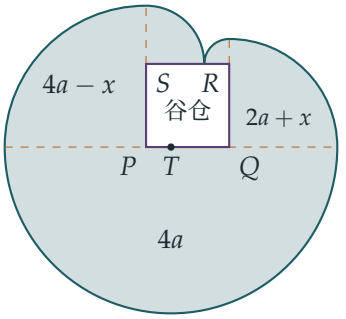
建立模型

把谷仓标记为 $PQRS$，山羊系在边 PQ 上的点 T，其中 $PT = x$，$TQ = 2a - x$，$0 \le x \le 2a$。根据对称性（symmetry），山羊系在哪一条边上并无分别。

若由 T 出发、避开谷仓而到达某一点的最短路径的长度不超过 $4a$，山羊便能到达该点。绳子拉紧时，这条路径除了在谷仓的角上转弯之外，都是直线。由 T 起绕着谷仓看：

- PQ **的前方**。直线 PQ 另一侧的每一点，都可以由 T 直接看见，所以山羊可吃到一个半径为 $4a$ 的半圆内的草。
- PS **和** QR **的旁边**。绳子绕过 P 之后，余下的长度是 $4a - x$，它沿着边 PS 扫出一个以 P 为圆心的四分之一圆。同样，在 Q 处余下 $4a - (2a - x) = 2a + x$，于是沿着 QR 得到一个以 Q 为圆心的四分之一圆。
- **谷仓的后方**。由于 $x \le 2a$，我们有 $4a - x \ge 2a$，所以绳子可到达 S，而且还余下 $(4a - x) - 2a = 2a - x$，这段绳子在边 SR 的后方扫出一个以 S 为圆心的四分之一圆。同理，绳子到达 R 时还余下 $(2a + x) - 2a = x$，于是得到一个以 R 为圆心、半径为 x

的四分之一圆。



想一想 谷仓后方的两块区域会否重叠，以致我们把某些草地重复计算了两次?

以 S 和 R 为圆心的两个四分之一圆位于直线 SR 的同一侧。它们的半径 $2a - x$ 和 x 加起来等于 $2a = SR$，所以两个圆刚好在 SR 上与 S 相距 $2a - x$ 的那一点相切。因此它们并不重叠，而两者合起来，山羊可到达整条边 SR。其他各块区域也互不重叠：半圆位于直线 PQ 的一侧，四个四分之一圆则位于另一侧，各自占据谷仓旁边或后方的一个区域。此外，谷仓后方的一点能够到达，当且仅当它与 S 或 R 的距离不超过该处余下的绳长，所以没有遗漏任何地方。

面积

把半圆和四个四分之一圆加起来，

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}\pi(4a)^2 + \tfrac{1}{4}\pi\left[(4a-x)^2 + (2a+x)^2 + (2a-x)^2 + x^2\right] \\ &= 8\pi a^2 + \tfrac{1}{4}\pi\left(4x^2 - 8ax + 24a^2\right) \\ &= \pi\left(x^2 - 2ax + 14a^2\right) \\ &= \pi\left[(x-a)^2 + 13a^2\right]. \end{aligned}$$

这条公式对 $[0, 2a]$ 内的每一个 x 都成立。在两个端点（$x = 0$ 或 $x = 2a$，即山羊系在角上），其中一个四分之一圆缩成一点，而半圆与半径为 $4a$ 的四分之一圆则合并成四分之三个圆，正如我们所预期。

最大值与最小值

在 $0 \le x \le 2a$ 上，我们有 $-a \le x - a \le a$，所以 $0 \le (x-a)^2 \le a^2$。因此

$$13\pi a^2 \le A \le 14\pi a^2,$$

这就证明了 $A \leq 14\pi a^2$。右边的等号恰好在 $x = 0$ 或 $x = 2a$ 时成立，即山羊系在角上的时候。左边的界在 $x = a$ 时取得，所以 A 的最小值是

$$A_{\min} = 13\pi a^2,$$

在山羊系于一条边的中点时取得。

验算

- 在角上（$x = 0$），我们得到四分之三个半径为 $4a$ 的圆（$12\pi a^2$）、绕过邻边远端那个角的一个半径为 $2a$ 的四分之一圆（πa^2），以及谷仓后方一个半径为 $2a$ 的四分之一圆（πa^2）。合共 $14\pi a^2$，与公式相符。
- 我们取 $a = 1$，在一个细密的网格上估算吃草面积，逐点按它绕过谷仓的真正最短距离（一条直线，或在角上转弯的折线）来判断。系于中点时得 40.845，而 $13\pi \approx 40.841$；系于角上时得 43.988，而 $14\pi \approx 43.982$；其他系绳点的结果也同样吻合。

常见错误

- 忘记了谷仓后方的区域：绳子的长度足以在每一边绕过两个角。
- 担心谷仓后方的两块区域重叠，或在计算中硬加入重叠部分。它们的半径之和永远恰好是 $2a$，所以两个圆只是相切。

STEP 之外

拉紧的绳子所走的是一条*测地线*（geodesic），即在有障碍物的区域内的最短路径。在这里，它由若干直线段组成，只在谷仓的角上转弯，所以山羊能到达的点集，是在一种非欧几里得（non-Euclidean）的距离量度方式下的一个“球”。绕过障碍物的最短路径，通向变分法（calculus of variations），也通向计算机科学中的运动规划（motion planning）问题。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 收录了更多这类题目，当中只要仔细分情况讨论，便可把几何问题化为简单的代数。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。