详细解答

STEP I 2006，第 11 题

力学 · 弹性碰撞

> **STEP I 2006，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q11

关键思路

我们无法逐次追踪每一次碰撞：我们连 $A_1, \ldots, A_{n-2}$ 的质量也不知道。因此我们只考虑最终状态。有两项事实限制着最终状态。第一，动量（momentum）和动能（kinetic energy）在结束时与开始时相同。第二，所有碰撞结束之后，没有任何粒子能追上它前面的粒子，所以最终速度沿着槽（弱）递增。于是每一部分都只需一段简短的论证，说明这两项事实容许哪些最终状态。

解答

建立模型

我们把各粒子视为在一条直线上无摩擦地运动的质点，而每次碰撞都是完全弹性（perfectly elastic）的。取 A_0 初始运动的方向为正方向，并设 v_k 为 A_k 的最终速度（$k = 0, 1, \ldots, n$）。以 m_k 表示 A_k 的质量，所以 $m_0 = m_{n-1} = m$ 而 $m_n = \lambda m$。由守恒（conservation）定律得

$$\sum_{k=0}^{n} m_k v_k = mu, \tag{M}$$

$$\sum_{k=0}^{n} m_k v_k^2 = mu^2. \tag{E}$$

粒子在槽内不能互相越过，所以它们一直保持 $A_0, A_1, \ldots, A_n$ 的次序。假如最终对某个 k 有 $v_k > v_{k+1}$，那么 A_k 便会追上 A_{k+1}，于是还会再有一次碰撞。因此在所有碰撞结束之后

$$v_0 \le v_1 \le \cdots \le v_n. \tag{O}$$

特别地，向前运动的粒子前面不能有静止的粒子，而向后运动的粒子后面也不能有静止的粒子。

第 (i) 部分

假设最终只有 A_j 在运动，速度为 v。那么由 (M) 和 (E) 得 $m_j v = mu$ 及 $m_j v^2 = mu^2$。两式相除，得 $v = u$，从而 $m_j = m$。

由于 $v = u > 0$，次序条件 (O) 要求 A_j 前面每一个粒子的速度都至少为 u。但它们全部静止，所以前面根本没有粒子，即 $A_j = A_n$。然而 A_n 的质量是 $\lambda m \neq m$，因为 $\lambda > 1$。这是一个矛盾（contradiction），所以最终不可能恰好只有一个粒子在运动。

第 (ii) 部分

假设只有 A_{n-1} 和 A_n 在运动，速度分别为 p 和 q。把 (M) 和 (E) 除以 m，

$$p + \lambda q = u, \qquad p^2 + \lambda q^2 = u^2.$$

把 $p = u - \lambda q$ 代入第二条方程，得 $-2\lambda uq + \lambda^2 q^2 + \lambda q^2 = 0$，即

$$\lambda q((1+\lambda)q - 2u) = 0.$$

因为 A_n 在运动，我们需要 $q \neq 0$，所以

$$q = \frac{2u}{1+\lambda}, \qquad p = u - \frac{2\lambda u}{1+\lambda} = -\frac{(\lambda-1)u}{1+\lambda} < 0.$$

所以 A_{n-1} 会向后运动。但 $n \geq 2$，所以它后面有一个粒子 A_{n-2}，而按假设该粒子是静止的。于是 $v_{n-2} = 0 > p = v_{n-1}$，这与 (O) 矛盾：$A_{n-1}$ 会撞上 A_{n-2}。所以这个最终状态同样不可能出现。

第 (iii) 部分

这里的主要工具是以下事实。

引理（lemma）。在运动结束时，必有某个粒子向后运动。

证明。假设相反，即对每个 k 都有 $v_k \geq 0$。由 (O)，v_n 是最大的速度。(E) 中的每一项都满足 $m_k v_k^2 \leq v_n m_k v_k$，因为 $0 \leq v_k \leq v_n$ 而 $m_k > 0$。把这些不等式相加并利用 (M)，

$$mu^2 = \sum m_k v_k^2 \leq v_n \sum m_k v_k = v_n\, mu, \qquad \text{所以} \qquad v_n \geq u.$$

另一方面，(M) 中的每一项都是非负的，所以单独一项 $\lambda m v_n$ 不会超过总和：

$$\lambda m v_n \leq mu, \qquad \text{所以} \qquad v_n \leq \frac{u}{\lambda} < u,$$

这里用到 $\lambda > 1$ 和 $u > 0$。这两个界互相矛盾。 □

想一想 题目从来没有给出 $A_1, \ldots, A_{n-2}$ 的质量。为甚么这并不要紧?

引理只用到 (M)、(E)、(O) 以及 A_n 的质量，所以无论其他质量是多少，它都成立。正因如此，这道题才有可能解答。

现在假设最终只有 A_{n-2}、A_{n-1} 和 A_n 在运动。

若 $n \geq 3$，则 A_{n-2} 后面有一个静止的粒子 A_{n-3}。由 (O)，$v_{n-2} \geq v_{n-3} = 0$，从而 $v_{n-1}, v_n \geq v_{n-2} \geq 0$。每个粒子的速度都 ≥ 0，而这是引理所不容许的。

若 $n = 2$，这三个粒子就是 A_0、A_1、A_2，亦即全部粒子，而整个运动是完全确定的。当 A_0 撞上 A_1 时（两者质量相等），速度互相交换：A_0 停下，而 A_1 以速率 u 继续前进。然后 A_1 撞上 A_2，按第 (ii) 部分的计算（碰撞前的速度为 u 和 0），它以速度 $-\frac{(\lambda-1)u}{\lambda+1}$ 反弹，而 A_2 则以 $\frac{2u}{\lambda+1}$ 离开。最后 A_1 撞上静止的 A_0，质量相等的两者再次交换速度。此后，A_0 向后运动，A_1 静止，A_2 向前运动，所以 (O) 成立，不会再有碰撞。A_1 最终静止，所以三个粒子全部都在运动同样是不可能的。

第 (iv) 部分

假设最终恰好有两个粒子在运动。由 (M)，总动量为 $mu > 0$，所以其中至少一个向前运动。由引理，至少一个向后运动。所以其中一个，设为 A_i，有 $v_i < 0$，而另一个 A_j 有 $v_j > 0$。

想一想 这两个粒子可以是哪两个?

由 (O)，A_i 后面每一个粒子的速度都 $\leq v_i < 0$，所以它在运动。但另外在运动的只有 A_j，而它是向前运动的，所以 A_i 后面没有任何粒子：$A_i = A_0$。同样地，A_j 前面每一个粒子的速度都 $\geq v_j > 0$，所以前面没有粒子，即 $A_j = A_n$。

所以在运动的是 A_0（质量 m）和 A_n（质量 λm），速度分别为 $a < 0$ 和 $b > 0$。方程 (M) 和 (E) 成为

$$a + \lambda b = u, \qquad a^2 + \lambda b^2 = u^2,$$

与第 (ii) 部分的方程完全一样。由于 $b \neq 0$，

$$b = \frac{2u}{\lambda+1}, \qquad a = -\frac{(\lambda-1)u}{\lambda+1}.$$

因此，在运动的两个粒子是 A_0，以速率 $\dfrac{(\lambda-1)u}{\lambda+1}$ 向后运动，以及 A_n，以速率 $\dfrac{2u}{\lambda+1}$ 向前运动。

这种情况确实可以发生：第 (iii) 部分中 $n = 2$ 的情形正是以这个状态告终。

验算

- 取 $\lambda = 3$ 和 $u = 4$，两个速率是 2 和 2。于是动量为 $m(-2) + 3m(2) = 4m$，能量为 $\frac{1}{2}m(4) + \frac{1}{2}(3m)(4) = 8m = \frac{1}{2}m(16)$，与应有的结果相符。
- 当 $\lambda \to 1$ 时，A_0 的最终速率趋向 0，而 A_n 的最终速率趋向 u：当所有质量都相等时，速度只是沿着整列粒子逐一传递下去，就像牛顿摆（Newton's cradle）一样。
- 我们对 60,000 个随机设置模拟了整个碰撞过程（n 由 2 至 6，$A_1, \ldots, A_{n-2}$ 的质量随机，λ 和间距亦随机）。A_0 最终总是向后运动，(i)–(iii) 中的最终状态从未出现，而每当恰好有两个粒子在运动时，它们都是 A_0 和 A_n，速率亦与上文所得相同。

常见错误

- 试图追踪每一次碰撞。中间各粒子的质量是未知的，所以只能分析最终状态。
- 忘记次序条件 (O)。单凭守恒定律，第 (ii) 部分的状态是容许的；把它排除的正是次序条件。
- 假定 A_{n-2} 不是 A_0。当 $n = 2$ 时它正是，而第 (iii) 部分需要另作一个（简短的）论证。

STEP 之外

这个引理是两个守恒量之间的一个不等式：当所有速度都非负时，能量不能超过（最大速度）×（动量）。这类论证利用守恒量和次序关系来排除某些最终状态，而无须解出整个动力学过程，在多粒子系统的研究中十分典型。下一步不妨阅读 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论），书中对碰撞、质心参考系（centre-of-mass frame）和守恒定律都有细致的处理。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。