详细解答

STEP I 2006，第 10 题

力学 · 抛体运动

> **STEP I 2006，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q10

关键思路

轨迹（trajectory）是一条抛物线（parabola），屋顶是一条直线，所以“刚好碰到”的意思就是这条直线是一条*切线*（tangent）：把其中一条方程代入另一条，会得到一条关于 x 的二次方程（quadratic），而且它有重根（repeated root）。至于正负号的问题，只要问这个重根位于何处便可解决。在最后一部分，两个质点只可能在 P 碰到屋顶的那一点相遇，所以 Q 必须恰好在 P 到达该点的那一刻到达；比较两者在该时刻的水平位置，便得出结果。

解答

轨迹

把 P 看成一个只受重力作用而自由运动的质点（particle），不计空气阻力。它的初速度在水平和垂直方向的分量都是 $V\cos 45^\circ = V/\sqrt{2}$，所以在时间 t

$$x = \frac{Vt}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{Vt}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

利用 $t = \sqrt{2}\,x/V$ 消去时间，得 $\frac{1}{2}gt^2 = gx^2/V^2$，所以轨迹是

$$y = x - \frac{gx^2}{V^2}.$$

碰到屋顶

P 与屋顶相遇之处满足 $x - gx^2/V^2 = x\tan\alpha + b$，即

$$\frac{g}{V^2}\,x^2 + (\tan\alpha - 1)\,x + b = 0. \qquad (*)$$

相切（而不是穿过）表示 $(*)$ 有重根，所以它的判别式（discriminant）等于零：

$$(\tan\alpha - 1)^2 = \frac{4gb}{V^2} \quad \Longrightarrow \quad V(\tan\alpha - 1) = \pm 2\sqrt{bg}.$$

想一想 两个正负号都满足判别式的条件。怎样分辨该取哪一个？

$(*)$ 的重根是

$$x_0 = -\frac{(\tan\alpha - 1)V^2}{2g} = \frac{(1 - \tan\alpha)V^2}{2g}.$$

质点沿 x 递增的方向运动（因为 $x = Vt/\sqrt{2}$），所以它只可能在 $x_0 > 0$ 之处碰到屋顶。这就迫使 $\tan\alpha - 1 < 0$，而由于 $V > 0$，左边的 $V(\tan\alpha - 1)$ 是负数。因此

$$V(-1 + \tan\alpha) = -2\sqrt{bg},$$

这正是所要证明的。（若取正根，切点便会在 $x_0 < 0$ 之处，即位于抛物线向后延伸的部分，而 P 从不经过那里。）从几何上看，屋顶的斜度必须小于初始运动方向的斜度，即 $\alpha < 45°$；否则屋顶一直在直线 $y = x$ 之上，而抛物线在 $x > 0$ 时位于该直线之下。

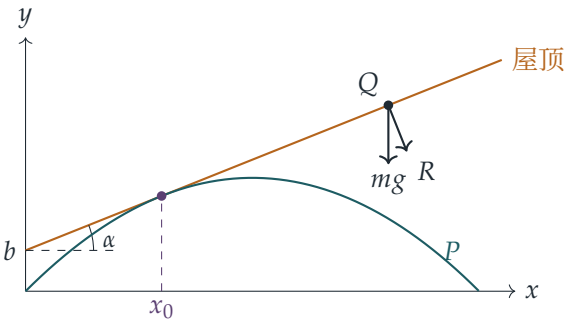
相切的时刻

由于 $x = Vt/\sqrt{2}$，相切的时刻是

$$T = \frac{\sqrt{2}\,x_0}{V} = \frac{\sqrt{2}\,(1 - \tan\alpha)V}{2g} = \frac{V(1 - \tan\alpha)}{\sqrt{2}\,g}.$$

路轨上的质点

把 Q 看成一个在光滑（smooth）路轨上的质点，路轨沿直线 $y = x\tan\alpha + b$；它从 $(0, b)$ 沿路轨向 x 递增的方向射出（必须如此，才能到达 P，因为后者的 x 永远是正数）。作用于 Q 的力有它的重量 mg，以及路轨对它的法向反作用力（normal reaction）R，后者垂直于路轨。下图显示了这些力，以及 P 的路径在 $x = x_0$ 处与屋顶相切的情况。



由于没有摩擦力，沿路轨向斜上方分解，得

$$m\ddot{s} = -mg\sin\alpha,$$

其中 s 是 Q 沿路轨与 $(0,b)$ 的距离。以 $s=0$ 及 $\dot{s}=U$ 作为 $t=0$ 时的初始条件，

$$s = Ut - \tfrac{1}{2}gt^2\sin\alpha, \qquad x_Q = s\cos\alpha.$$

P 除了在切点之外从不在屋顶上，而 Q 则一直在屋顶上，所以两个质点要相碰，唯一的可能是 Q 在时间 T 位于该点。那时两个质点都在屋顶所在的直线上，所以只需它们的 x 坐标在时间 T 相等：

$$\left(UT - \tfrac{1}{2}gT^2\sin\alpha\right)\cos\alpha = \frac{VT}{\sqrt{2}}.$$

两边除以 $T>0$，并代入 $gT = V(1-\tan\alpha)/\sqrt{2}$：

$$U\cos\alpha = \frac{V}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{V(1-\tan\alpha)}{\sqrt{2}}.$$

两边乘以 $2\sqrt{2}$，并利用 $\sin\alpha\cos\alpha\tan\alpha = \sin^2\alpha$，

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}\,U\cos\alpha &= 2V + V\sin\alpha\cos\alpha\,(1-\tan\alpha) \\ &= V\left(2 + \sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha\right), \end{aligned}$$

这就是所要求的结果。

验算

- 单位：$V(1-\tan\alpha)/g$ 是速率除以加速度，所以是时间；而 $\sqrt{bg}$ 是速率，与 $V(\tan\alpha-1)$ 一样。
- 极限情况 $\alpha\to 0$（屋顶水平）：$b = V^2/(4g)$ 正是大家熟悉的最大高度 $(V\sin 45^\circ)^2/(2g)$，在 $T = V/(\sqrt{2}g)$ 时到达；而 Q 沿路轨方向不受力，所以它的速率必须与 P 的水平速率相同，即 $U = V/\sqrt{2}$。公式给出的正是这个结果。
- 数值验算：取 $g=9.8$、$V=10$ 及 $\alpha = 0.3$ 弧度，切点位于 $x_0 \approx 3.524$。让 Q 以推导所得的 U 沿路轨逐步前进，对随机选取的 V 和 $\alpha < \pi/4$，它在时间 T 的位置与 P 的位置相差不超过 10^{-6}，而 P 在其他所有时刻都在屋顶之下。

常见错误

- 把 Q 的加速度写成 $-g$ 或 $-g\cos\alpha$：只有重力沿路轨方向的分量 $g\sin\alpha$ 才沿路轨起作用。

- 把 U 当作水平速率：U 是沿路轨的速率，所以 Q 的水平位移是 $s\cos\alpha$。
- 只用“速率是正数”来解释为何取负根。真正起决定作用的是 x_0 的正负号（等价于 $\tan\alpha < 1$）。

STEP 之外

相切条件是一个普遍想法的特殊情况：一族曲线所能到达的区域，其边界就是这族曲线的*包络线* (envelope)，而求包络线，归根究底就是问一条二次方程何时有重根。对于以固定速率向各个方向抛出的抛体（projectile），包络线就是所谓的“安全抛物线”（parabola of safety）。Q 的运动是最简单的约束运动（constrained motion）；大学一年级的课程会用拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）有系统地处理约束。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对抛体和约束运动都有细致的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。