详细解答

STEP III 2005，第 9 题

力学 · 碰撞与恢复系数

STEP III 2005，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

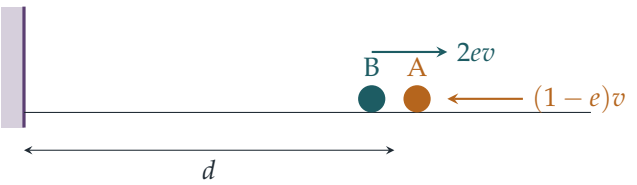
step.maths.org/questions/05-s3-q9

关键思路

这两个质量看似古怪，其实是特意选定的，好让第一次碰撞得出非常整齐的答案。求出第二次碰撞之后，把它发生前一刻的速度与第一次碰撞前一刻的速度比较：两者相同，只是各自乘以 e。碰撞定律对速度而言是线性（linear）的，所以整个过程会以较小的尺度重演，其后的每一次碰撞也就一并得出。

解答

我们把 A 和 B 视为光滑水平直线上的质点（particle），每次碰撞均应用牛顿实验定律（Newton's experimental law）。取朝向墙壁的方向为正，距离则由墙壁量起。



（图中所示为第一次碰撞前的一刻，两个质点画得稍为分开。）

第一次碰撞

设碰撞后 A 和 B 的速度（朝向墙壁）分别为 v_A 和 v_B。碰撞前，A 的速度为 $(1-e)v$，B 的速度为 $-2ev$。

由动量守恒（conservation of momentum）得

$$\begin{aligned}4em\,v_A + (1-e)^2 m\,v_B &= 4em(1-e)v - (1-e)^2 m\cdot 2ev \\ &= 2e(1-e)v[2-(1-e)]m = 2e(1-e)(1+e)v\,m.\end{aligned}$$

接近速率（speed of approach）为 $(1-e)v + 2ev = (1+e)v$，故由牛顿定律得

$$v_B - v_A = e(1+e)v.$$

把 $v_B = v_A + e(1+e)v$ 代入动量方程，再除以 m：

$$[4e + (1-e)^2]v_A = 2e(1-e)(1+e)v - (1-e)^2 e(1+e)v = e(1-e)(1+e)v[2-(1-e)].$$

由于 $4e + (1-e)^2 = (1+e)^2$，右方等于 $e(1-e)(1+e)^2 v$，因此

$$v_A = e(1-e)v, \qquad v_B = e(1-e)v + e(1+e)v = 2ev.$$

两者皆为正数：碰撞后，**A 以速率** $e(1-e)v$ **朝向墙壁运动，B 以速率** $2ev$ **朝向墙壁运动**。

第二次碰撞

B 较快，所以会抛离 A，并在时间 $t_1 = d/(2ev)$ 之后到达墙壁。在这段时间内，A 移动了 $e(1-e)v\cdot\frac{d}{2ev} = \frac{1}{2}(1-e)d$，所以 A 与墙壁的距离为

$$d - \tfrac{1}{2}(1-e)d = \tfrac{1}{2}(1+e)d$$

。B 以速率 $e\cdot 2ev = 2e^2 v$ 反弹，此时正远离墙壁，而 A 仍以速率 $e(1-e)v$ 朝向墙壁运动。两者互相接近，接近速率为 $e(1-e)v + 2e^2 v = e(1+e)v > 0$，所以它们必定再次相遇（而且是在 A 到达墙壁之前，因为 B 位于 A 与墙壁之间）。所需时间为

$$t_2 = \frac{\frac{1}{2}(1+e)d}{e(1+e)v} = \frac{d}{2ev},$$

其间 B 由墙壁起计移动了 $2e^2 v\cdot\frac{d}{2ev} = ed$。所以**第二次碰撞确会发生，位置距离墙壁** de，正如题目所求。

其后的碰撞

> ? **想一想** 怎样才能不必把所有功夫重做一遍，便推断出还有更多碰撞?

考察第二次碰撞前一刻的状态: A 以速率 $e(1-e)v$ 朝向墙壁运动, B 以速率 $2e^2 v = 2e(ev)$ 远离墙壁。这正好是把 v 换成 ev、把 d 换成 de 之后的初始状态（质量和 e 均不变）。上文所做的一切对任何 $v > 0$ 和 $d > 0$ 都成立，所以把 (v, d) 换成 (ev, de) 后，同一论证依

然适用：第三次碰撞会发生，位置距离墙壁 $(de)e = de^2$，而它发生前一刻的状态就是取 (e^2v, de^2) 的初始状态。由归纳法（induction）可知，对每个 n 都有第 $(n+1)$ 次碰撞，所以碰撞会永远持续下去。

第 n 次碰撞前一刻的状态，就是把 v 和 d 分别换成 $e^{n-1}v$ 和 de^{n-1} 的初始状态，所以

$$\text{第 } n \text{ 次碰撞发生于距离墙壁} de^{n-1} \text{ 之处。}$$

由第二部分可知，由一次碰撞到下一次碰撞所需的时间为 $t_1 + t_2 = d/(ev)$。若由第 n 次碰撞起计，这个时间变成

$$\frac{de^{n-1}}{e \cdot e^{n-1}v} = \frac{d}{ev},$$

与 n 无关。所以相继两次碰撞之间的时间全部相等，均为 $d/(ev)$。每一个循环中，距离和速率都按因子 e 缩小，这两个效应在时间上互相抵销。

验算

- 第一次碰撞的动量：取 $e = \frac{1}{2}$、$m = v = 1$，两个质量分别为 2 和 $\frac{1}{4}$；碰撞前，$2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$；碰撞后，$2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$。相对速率由 $\frac{3}{2}$ 变为 $\frac{3}{4}$，即乘以因子 e。
- 我们以分数作精确运算，就 200 组随机选取的 e、v、d、m 模拟了这个运动，每组计算八次碰撞：每次碰撞的位置都是 de^{n-1}，而相隔的时间全部是 $d/(ev)$。当 $e = \frac{1}{2}$、$v = d = 1$ 时，碰撞发生于时间 $0, 2, 4, 6$，距离为 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$。

常见错误

- 混淆正负号：B 起初是远离墙壁运动的，所以按我们的约定，它的初速度是负数。
- 忘记墙壁的恢复系数（coefficient of restitution）同样是 e，所以 B 离开墙壁时的速率是 $2e^2v$，而不是 $2ev$。
- 用蛮力把第二次碰撞重新计算一遍，而没有留意到当中的缩放关系；这样做也行得通，但冗长得多，而且容易看漏当中的规律。

STEP 之外

这里的推论用到线性和自相似性（self-similarity）：若把每个速度都乘以同一个常数，碰撞的方程保持不变，所以一个除尺度外能重现自身的状态会永远重复下去。同一想法也是分析弹跳无限多次的球的基础，更广泛而言，亦是量纲分析（dimensional analysis）的基础。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）正是以这种严谨的方式处理碰撞和动量。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。