详细解答

STEP III 2005，第 8 题

纯数学 · 复数与圆

STEP III 2005，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/05-s3-q8

关键思路

阿根图（Argand diagram）上的每一个长度，都可以用 $|z|^2 = zz^*$ 化为代数式。一旦得到第一条恒等式，直角就变成毕氏定理（Pythagoras' theorem），而切线（tangent）就变成切线与半径之间的直角。于是“OA 与圆相切”就化为单独一条方程，由此定出半径的平方为 $cc^* - aa^*$。此后，“P 在圆上”与“P' 在圆上”都归结为同一条方程。

解答

恒等式与直角

由于 $|z|^2 = zz^*$，而且取共轭（conjugate）与减法可以交换次序，

$$\begin{aligned} |a-c|^2 &= (a-c)(a-c)^* = (a-c)(a^*-c^*) \\ &= aa^* + cc^* - ac^* - ca^*, \end{aligned}$$

这正是所要证明的。

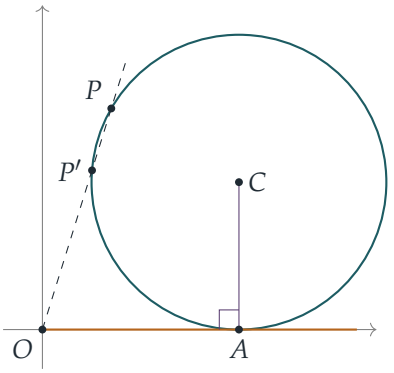
三角形 OAC 的边长为 $OA = |a|$、$OC = |c|$ 和 $AC = |a-c|$，由于 a, c 非零且互不相同，三者皆不为零。根据毕氏定理及其逆定理（converse），在 A 的角是直角，当且仅当 $OC^2 = OA^2 + AC^2$，即

$$cc^* = aa^* + (aa^* + cc^* - ac^* - ca^*) \iff 2aa^* = ac^* + ca^*.$$

这里每一步都可逆，所以“当且仅当”成立。

（毕氏定理的逆定理同时排除了退化的“三角形”。假如 O、A、C 共线（collinear），则三个长度之中有一个等于另外两个之和；当三个长度皆为正数时，这不可能与 $OC^2 = OA^2 + AC^2$ 同时成立。）

相切的圆



切线在切点处与半径垂直。因此 OA 在 A 与圆相切，即表示角 OAC 是直角，而根据第一部分，

$$2aa^* = ac^* + ca^*. \qquad (*)$$

半径 r 满足 $r^2 = |a-c|^2 = aa^* + cc^* - (ac^* + ca^*) = cc^* - aa^*$，当中用到 $(*)$。（这其实又是毕氏定理：$r^2 = OC^2 - OA^2$。）

设 $k = bb^* > 0$ 及 $s = abc^* + a^*b^*c$。则

$$|ab-c|^2 = (ab-c)(a^*b^* - c^*) = aa^*k - s + cc^*,$$
$$\left|\frac{a}{b^*} - c\right|^2 = \left(\frac{a}{b^*} - c\right)\left(\frac{a^*}{b} - c^*\right) = \frac{aa^*}{k} - \frac{ac^*}{b^*} - \frac{a^*c}{b} + cc^*.$$

把第二式乘以 $k = bb^*$，得

$$k\left|\frac{a}{b^*} - c\right|^2 = aa^* - s + k\,cc^*. \qquad (**)$$

P **在圆上**。$|ab-c|^2 = cc^* - aa^*$ 成立，当且仅当

$$aa^*k - s + cc^* = cc^* - aa^* \iff aa^*(k+1) = s.$$

P' **在圆上**。$|a/b^* - c|^2 = cc^* - aa^*$ 成立，当且仅当（乘以 $k \neq 0$ 并利用 $(**)$）

$$aa^* - s + k\,cc^* = k\,cc^* - k\,aa^* \iff aa^*(k+1) = s.$$

两个条件完全相同，所以 P 在圆上当且仅当 P' 在圆上。

逆命题

现在不再假设相切。设圆的圆心为 C 并通过 A，于是 $r^2 = |a-c|^2 = aa^* + cc^* - ac^* - ca^*$。再设 ab 和 a/b^* 都在圆上，其中 $k = bb^* \neq 1$。利用同样的展开式，

$$aa^*k - s + cc^* = r^2,$$
$$aa^* - s + k\,cc^* = kr^2 \qquad (\text{由 } (**)).$$

从第一条方程减去第二条，便可消去 s：

$$(k-1)\,aa^* - (k-1)\,cc^* = (1-k)\,r^2.$$

> **想一想** 为甚么题目坚持要 $bb^* \neq 1$?

若 $bb^* = 1$，则 $b^* = 1/b$，于是 $a/b^* = ab$，两点重合。“两点都在圆上”这时只是单独一个条件，当然不足以推出相切。在我们的代数运算中，这正正就是除以 $k-1 \neq 0$ 的那一步：

$$r^2 = cc^* - aa^*.$$

与 $r^2 = aa^* + cc^* - ac^* - ca^*$ 比较，得 $2aa^* = ac^* + ca^*$。根据第一部分，角 OAC 是直角。因此 OA 在圆上的点 A 处与半径 CA 垂直，即 OA 是圆的切线。

验算

- 这个结果背后有一个简洁的几何原因。由于 $\dfrac{a}{b^*} = \dfrac{ab}{bb^*}$，点 P' 就是把 P 按正实数 $1/|b|^2$ 缩放而得。所以 O、P、P' 共线，且 $OP \cdot OP' = |a|^2 = OA^2$，这正是切割线定理（tangent–secant theorem）（见图）。
- 数值上，取 $a = 2$、$c = 2 + 1.5\mathrm{i}$（于是 $r^2 = 2.25 = |c|^2 - |a|^2$），以及圆上的 $P = 0.701 + 2.25\mathrm{i}$。则 $b = P/2$ 及 $P' = a/b^* \approx 0.505 + 1.620\mathrm{i}$，而 $|P' - c|^2 \approx 2.250$。
- 我们用电脑以随机的 a, b, c 验证了恒等式和相切的情况。另外又取了 1000 个随机的非相切圆，并设 $|b| \neq 1$：每一次，只要 P 在圆上，P' 就必定不在圆上。

常见错误

- 正确写出 $(a-c)^* = a^* - c^*$，其后却把 $|a-c|^2$ 展开成 $(a-c)^2$。模（modulus）的平方必须用到共轭。
- 在逆命题中，一开始就假设相切（从而假设 $r^2 = cc^* - aa^*$）。这正是你要证明的结论。只可从 $r = |a-c|$ 出发。
- 除以 $1 - bb^*$ 时没有说明它为何不等于零。

STEP 之外

由于 $|a|^2/(ab)^* = aa^*/(a^*b^*) = a/b^*$，点 P' 是 P 在 $z \mapsto |a|^2/z^*$ 之下的像。这个映射就是关于圆 $|z| = |a|$ 的反演（inversion）：它把每一点送到由 O 出发的同一条射线上、距离为 $|a|^2/OP$ 的那一点。本题说明，与反演圆正交（orthogonal）的圆会被映射到自身。反演以及由它生成的莫比乌斯变换（Möbius transformations），是大学一年级复分析（complex analysis）和几何的核心内容。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 用了整整一章的篇幅作出精彩的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。