详细解答

STEP III 2005，第 7 题

纯数学 · 代换积分法

> **STEP III 2005，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q7

关键思路

题目开首的结果告诉我们：只要被积函数（integrand）外面另有一个单独的因子 $\frac{1}{x}$，藏在被积函数里的 x^m 就可以当作一个新变量 $u = x^m$ 来处理。因此，对每一个积分，我们先从分母抽出一个因子 x，看看剩下的是哪一个幂 x^m、函数 f 又是甚么，然后改为计算容易得多的 u 积分。

解答

一般结果

已知 $\mathrm{F}'(u) = \dfrac{1}{u\,\mathrm{f}(u)}$。用链式法则（chain rule）对 $\mathrm{F}(x^m)$ 求导（取 $x > 0$，使 x^m 对任何实数 m 都有意义），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{F}(x^m) = \mathrm{F}'(x^m)\cdot mx^{m-1} = \frac{mx^{m-1}}{x^m\,\mathrm{f}(x^m)} = \frac{m}{x\,\mathrm{f}(x^m)}.$$

所以 $\mathrm{F}(x^m)$ 是 $\dfrac{m}{x\,\mathrm{f}(x^m)}$ 的一个原函数（antiderivative），这正是所要证明的结果：

$$\int \frac{m}{x\,\mathrm{f}(x^m)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(x^m) + c.$$

换句话说，这就是把代换（substitution）$u = x^m$、$\mathrm{d}u = mx^{m-1}\,\mathrm{d}x$ 倒过来看。条件 $m \neq 0$ 在下文十分重要：我们将会除以 m。

实际运用时，我们把它写成

$$\int \frac{1}{x\,\mathrm{f}(x^m)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m}\,\mathrm{F}(x^m) + c. \qquad (*)$$

第 (i) 部分

抽出一个因子 x，

$$\frac{1}{x^n - x} = \frac{1}{x\,(x^{n-1} - 1)}.$$

这符合 $(*)$ 的形式，其中 $m = n - 1$，$\mathrm{f}(u) = u - 1$。我们需要 $n \neq 1$；当 $n = 1$ 时，分母 $x^n - x$ 恒等于零，根本没有积分可求。

接着要求 F，即 $\dfrac{1}{u(u-1)}$ 的一个原函数。由部分分式（partial fractions）得

$$\frac{1}{u(u-1)} = \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}, \qquad \text{所以} \qquad \mathrm{F}(u) = \ln|u-1| - \ln|u| = \ln\left|\frac{u-1}{u}\right|.$$

把 $u = x^{n-1}$ 代入 $(*)$：

$$\boxed{\int \frac{1}{x^n - x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\ln\left|\frac{x^{n-1}-1}{x^{n-1}}\right| + c, \qquad n \neq 1.}$$

有了绝对值（modulus）符号，这条公式在被积函数有定义的任何区间上都成立（例如在 $0 < x < 1$ 上和在 $x > 1$ 上都成立；当 n 是整数时，在 $x < 0$ 上也成立）。

第 (ii) 部分

这里把 x 从平方根中抽出来时要小心一点。我们只考虑 $x > 0$，这时 x^n 对每个 n 都有定义，而且 $\sqrt{x^2} = x$。于是

$$\sqrt{x^n + x^2} = \sqrt{x^2\,(x^{n-2} + 1)} = x\sqrt{1 + x^{n-2}},$$

所以被积函数是

$$\frac{1}{x\sqrt{1 + x^{n-2}}},$$

这符合 $(*)$ 的形式，其中 $m = n - 2$，$\mathrm{f}(u) = \sqrt{1+u}$。

? **想一想** 当 $n = 2$ 时会怎样?

这时 $m = 0$，一般结果并不适用。不过这个积分可以直接计算，十分容易：被积函数是 $\dfrac{1}{\sqrt{2x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,x}$，所以

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln x + c \qquad (n = 2).$$

当 $n \neq 2$ 时，我们需要 $\mathrm{F}(u) = \displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u$，其中 $u = x^{n-2} > 0$。代入 $t = \sqrt{1+u}$，则 $u = t^2 - 1$，$\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$，且 $t > 1$：

$$\int \frac{1}{u\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u = \int \frac{2t}{(t^2-1)\,t}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right),$$

由于 $t>1$，这里不需要绝对值符号。这个结果可以化简得很整齐：把分子和分母同乘以 $t-1$，并利用 $t^2-1=u$，

$$\frac{t-1}{t+1}=\frac{(t-1)^2}{t^2-1}=\frac{\left(\sqrt{1+u}-1\right)^2}{u},\qquad \text{所以}\qquad \mathrm{F}(u)=2\ln\left(\sqrt{1+u}-1\right)-\ln u.$$

现在把 $u=x^{n-2}$ 代入 $(*)$，其中 $m=n-2$。$-\ln u$ 一项变成 $-(n-2)\ln x$，再除以 $m=n-2$ 便成为 $-\ln x$：

$$\boxed{\int\frac{1}{\sqrt{x^n+x^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n-2}\ln\left(\sqrt{1+x^{n-2}}-1\right)-\ln x+c,\qquad n\neq 2,\ x>0.}$$

答案也可以等价地写成 $\dfrac{1}{n-2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^{n-2}}-1}{\sqrt{1+x^{n-2}}+1}\right)+c$；两种形式都可以。

验算

- 把答案求导，看看能否还原。对于 (i)，取 $n=2$，公式给出 $\ln|x-1|-\ln|x|$，其导数是 $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2-x}$，正如所料。
- 对于 (i),取 $n=3$,公式给出 $\displaystyle\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{x^3-x}=\frac{1}{2}\ln\frac{32}{27}\approx 0.084950$,与辛普森法则(Simpson's rule）的结果吻合。
- 对于 (ii)，取 $n=3$，公式给出 $\displaystyle\int_1^3\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+x^2}}=\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{3}\approx 0.664135$，同样与数值积分（numerical integration）的结果吻合。我们还用许多不同的 n 值检验过这两条公式，包括负数和非整数的值。

常见错误

- 漏掉因子 $\frac{1}{m}$：一般结果的分子有 m，而我们的被积函数没有，所以必须除以 m。
- 不加说明就写 $\sqrt{x^2}=x$。这只在 $x\geq 0$ 时成立；当 $x<0$ 时，它等于 $-x$（或写成 $|x|$）。
- 遗漏例外的值：(i) 中的 $n=1$ 和 (ii) 中的 $n=2$，这时 $m=0$。

STEP 之外

题目开首的结果，其实是从另一面看代换法则：代换不过是把链式法则倒过来用，而在大学第一门分析（analysis）课程中，代换法则正是这样证明的，当中会对所涉及的函数仔细列明假设。像 (ii) 这类含有多项式平方根的积分，会引出一个问题：到底哪些积分可以用初等函数（elementary functions）表示? 例如 $\int\mathrm{d}x/\sqrt{1+x^4}$ 就不可以。如想看微积

分基本定理（fundamental theorem of calculus）和代换法则的严谨论述，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。