详细解答

STEP III 2005，第 6 题

纯数学 · 解三次方程

STEP III 2005，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/05-s3-q6

关键思路

恒等式（identity）$4\cosh^3 y - 3\cosh y = \cosh 3y$ 的形状，与“缺项”三次式（depressed cubic）$x^3 - 3bx$ 完全一样，只要把 x 乘上适当的常数便可。因此，没有 x^2 项的三次方程，可以通过与三倍角公式（triple-angle formula）对照来求解，而 arcosh 的对数（logarithm）表达式则把双曲函数（hyperbolic function）形式的答案变回立方根。求得一个根之后，因式分解（factorisation）便给出另外两个根所满足的二次方程，再用单位立方根（cube roots of unity）把它们整理妥当。

解答

双曲函数形式的根

设 $x = 2a\cosh\frac{1}{3}T$。则

$$\begin{aligned} x^3 - 3a^2x &= 8a^3\cosh^3\tfrac{1}{3}T - 6a^3\cosh\tfrac{1}{3}T \\ &= 2a^3(4\cosh^3\tfrac{1}{3}T - 3\cosh\tfrac{1}{3}T) \\ &= 2a^3\cosh T, \end{aligned}$$

其中用了题目给出的恒等式，并取 $y = \frac{1}{3}T$。所以 $2a\cosh\frac{1}{3}T$ 满足该方程，这正是所要证明的。

$x^3 - 3bx = 2c$ 的一个根

先假设 $c > 0$。由于 $b > 0$，可取 $a = \sqrt{b} > 0$，使得 $3a^2 = 3b$，而我们需要 $2a^3 \cosh T = 2c$，即

$$\cosh T = \frac{c}{b^{3/2}}.$$

这需要 $c/b^{3/2} \geq 1$，而题目的条件正正用在这里：$c^2 \geq b^3$ 且 $c > 0$，故 $c \geq b^{3/2}$。所以可取

$$T = \operatorname{arcosh} \frac{c}{b^{3/2}} = \ln\left(\frac{c}{b^{3/2}} + \sqrt{\frac{c^2}{b^3} - 1} \right) = \ln \frac{c + \sqrt{c^2 - b^3}}{b^{3/2}}.$$

因此

$$e^{T/3} = \frac{(c + \sqrt{c^2 - b^3})^{1/3}}{b^{1/2}} = \frac{u}{\sqrt{b}}, \qquad e^{-T/3} = \frac{\sqrt{b}}{u},$$

而根据第一部分，其中一个根是

$$2\sqrt{b} \cosh \tfrac{1}{3}T = \sqrt{b}\left(\frac{u}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{u} \right) = u + \frac{b}{u}.$$

> **想一想** 如果 $c < 0$ 又如何？这时 $c/b^{3/2} \leq -1$，没有任何实数 T 的 cosh 会等于这个值。

把 x 换成 $-x$：方程变成 $x^3 - 3bx = -2c$，其中 $-c > 0$，所以根据刚才处理过的情况，它有根 $u' + b/u'$，其中 $u' = (-c + \sqrt{c^2 - b^3})^{1/3}$，而 $-(u' + b/u')$ 就是原方程的一个根。现在

$$u^3 u'^3 = (\sqrt{c^2 - b^3} + c)(\sqrt{c^2 - b^3} - c) = (c^2 - b^3) - c^2 = -b^3,$$

所以，取实立方根，得 $u' = -b/u$ 及 $-(u' + b/u') = u + b/u$。因此无论 c 是正是负，公式都成立。（留意在两种情况下均有 $u \neq 0$，因为当 $b > 0$ 时 $\sqrt{c^2 - b^3} < |c|$。）

另外两个根

记 $r = u + \frac{b}{u}$。由于 r 是一个根，$x - r$ 是因式，在

$$x^3 - 3bx - 2c = (x - r)(x^2 + rx + q) = x^3 + (q - r^2)x - rq$$

中比较系数（comparing coefficients）（x^2 项自动抵消），必有 $q = r^2 - 3b$。展开得

$$q = u^2 + 2b + \frac{b^2}{u^2} - 3b = u^2 + \frac{b^2}{u^2} - b,$$

所以另外两个根满足

$$x^2 + \left(u + \frac{b}{u}\right)x + u^2 + \frac{b^2}{u^2} - b = 0,$$

这正是所要证明的。（作为一致性的检查，常数项亦吻合：$rq = u^3 + b^3/u^3$，而有理化后 $b^3/u^3 = b^3/(c + \sqrt{c^2 - b^3}) = c - \sqrt{c^2 - b^3}$，所以 $rq = 2c$。）

要解这个二次方程，记 $v = b/u$，于是 $uv = b$，而二次方程成为

$$x^2 + (u + v)x + (u^2 - uv + v^2) = 0.$$

现在 $\omega^3 = 1$ 且 $1 + \omega + \omega^2 = 0$。试取 $x_1 = \omega u + \omega^2 v$ 和 $x_2 = \omega^2 u + \omega v$：

$$x_1 + x_2 = (\omega + \omega^2)(u + v) = -(u + v),$$
$$x_1 x_2 = \omega^3 u^2 + \omega^2 uv + \omega^4 uv + \omega^3 v^2 = u^2 + (\omega^2 + \omega)uv + v^2 = u^2 - uv + v^2.$$

这正是该二次方程的两根之和与两根之积，所以它的根是

$$x = \omega u + \omega^2 \frac{b}{u} \qquad 及 \qquad x = \omega^2 u + \omega \frac{b}{u}.$$

由于 $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 及 $\omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，这两个根亦可写成 $-\frac{1}{2}(u + \frac{b}{u}) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(u - \frac{b}{u})\mathrm{i}$。

解 $x^3 - 6x = 6$

这是 $x^3 - 3bx = 2c$，其中 $b = 2$，$c = 3$，而 $c^2 = 9 \geq 8 = b^3 > 0$，所以上述结果适用。这里

$$u = (3 + \sqrt{9 - 8})^{1/3} = 4^{1/3} = 2^{2/3}, \qquad \frac{b}{u} = \frac{2}{2^{2/3}} = 2^{1/3}.$$

所以各根为

$$x = 2^{2/3} + 2^{1/3}, \qquad x = -\tfrac{1}{2}(2^{2/3} + 2^{1/3}) \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2}(2^{2/3} - 2^{1/3})\mathrm{i},$$

其中那对复数根（complex roots）就是 $\omega\, 2^{2/3} + \omega^2\, 2^{1/3}$ 及其共轭（conjugate）。

验算

- 实根是 $2^{2/3} + 2^{1/3} \approx 2.847322$，而 $2.847322^3 - 6(2.847322) \approx 23.083930 - 17.083932 \approx 6.0000$。
- 三个根之和应为 0（没有 x^2 项）：$(u + v) - (u + v) = 0$。它们的积应为 6：$r(u^2 - uv + v^2) = u^3 + v^3 = 4 + 2 = 6$。
- 若 $c^2 = b^3$，则 $u = \sqrt{b} = b/u$，两个复数根都变成 $-\sqrt{b}$，即一个重根（repeated root），这可由 $x^3 - 3bx - 2b^{3/2} = (x - 2\sqrt{b})(x + \sqrt{b})^2$ 印证。

常见错误

- 忘记了 $\cosh T \geq 1$，所以双曲函数的论证只能直接用于 $c > 0$；$c < 0$ 的情况需要代换 $x \to -x$。

- 把复数根写成 $\omega u + \omega \frac{b}{u}$：两个立方根的积必须保持等于 b，所以 ω 的幂相乘必须等于 1。

STEP 之外

这就是三次方程的卡尔达诺公式（Cardano's formula），而 $u + b/u$ 这个形式（其中 u^3 是某个二次方程的根），正是十六世纪最初发现它时的模样。当 $c^2 < b^3$ 时，虽然三个根全是实数，平方根却是虚数（即所谓“不可约情况”（irreducible case）），这时便由三角形式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ 接手。至于一般的五次方程为何没有这类公式，那就是伽罗瓦理论（Galois theory）的故事了；Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）是很好的入门读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。