详细解答

STEP III 2005，第 5 题

纯数学 · 抛物线的公切线

STEP III 2005，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/05-s3-q5

关键思路

与其用切点来标记切线(tangent)，不如用斜率(gradient)来标记。对每一个斜率 m，抛物线(parabola) 都恰好有一条该斜率的切线，而第一部分告诉我们它的 y 轴截距 (intercept)。两条抛物线有一条斜率为 m 的公切线（common tangent），当且仅当这两个截距相等；于是数公切线的数目，就变成数一条方程的根 m 的数目。这条方程在 $a_1 \neq a_2$ 时是二次方程，在 $a_1 = a_2$ 时是一次方程。

解答

斜率为 m 的切线

$y = ax^2 + bx + c$ 的斜率是 $2ax + b$。由于 $a \neq 0$，它恰好在一点等于 m，即 $x_0 = \dfrac{m-b}{2a}$，而 $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$。该点的切线是 $y - y_0 = m(x - x_0)$，即 $y - mx = y_0 - mx_0$。利用 $m = 2ax_0 + b$，

$$\begin{aligned} y_0 - mx_0 &= ax_0^2 + bx_0 + c - (2ax_0 + b)x_0 \\ &= c - ax_0^2 = c - a \cdot \frac{(m-b)^2}{4a^2} = c - \frac{(m-b)^2}{4a}, \end{aligned}$$

所以在 P 点的切线是 $y - mx = c - \dfrac{(m-b)^2}{4a}$，正如所求。

有公切线的条件

由第一部分，每条曲线都恰好有一条斜率为 m 的切线，分别是

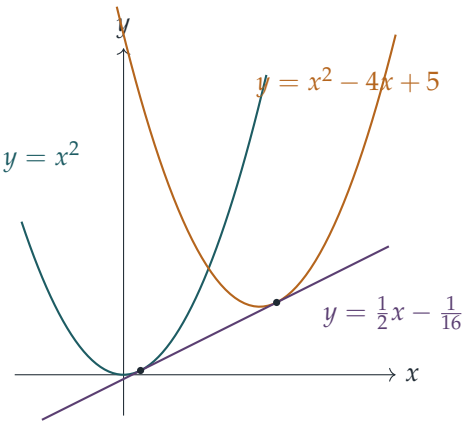
$$y = mx + k_1, \quad k_1 = c_1 - \frac{(m-b_1)^2}{4a_1}, \qquad \text{和} \qquad y = mx + k_2, \quad k_2 = c_2 - \frac{(m-b_2)^2}{4a_2}.$$

两条斜率相同的直线重合，当且仅当它们的截距相等，所以两条曲线有一条斜率为 m 的公切线，当且仅当 $k_1 = k_2$。乘以 $4a_1a_2 \neq 0$（这不会改变等式是否成立），

$$\begin{aligned} 4a_1a_2(k_2 - k_1) &= 4a_1a_2(c_2 - c_1) - a_1(m-b_2)^2 + a_2(m-b_1)^2 \\ &= (a_2 - a_1)m^2 + 2(a_1b_2 - a_2b_1)m + 4a_1a_2(c_2 - c_1) + a_2b_1^2 - a_1b_2^2. \end{aligned}$$

因此，有一条斜率为 m 的公切线，当且仅当这个式子等于零，这就是所求的条件。把该条件的左方记作 $Q(m)$。

由于 $Q(m) = 0$ 的每一个根 m 都恰好给出一条公切线，而不同的根给出不同的直线（它们的斜率不同），所以公切线的数目等于 $Q(m) = 0$ 的相异实根的数目。还要留意，公切线不可能是铅垂的，因为两条曲线都没有铅垂的切线。



两条满足 $a_1 = a_2$ 及 $b_1 \neq b_2$ 的抛物线恰好有一条公切线；图中这条公切线的斜率是 $\frac{1}{2}$。

$a_1 \neq a_2$ 的情况

这时 Q 是一个真正的 m 的二次式，所以它恰好有一个相异实根，当且仅当它的判别式（discriminant）等于零。判别式是

$$\Delta = 4(a_1b_2 - a_2b_1)^2 - 4(a_2 - a_1)(4a_1a_2(c_2 - c_1) + a_2b_1^2 - a_1b_2^2).$$

不含 c 的各项可以化简得很漂亮：

$$\begin{aligned}&(a_1b_2-a_2b_1)^2-(a_2-a_1)(a_2b_1^2-a_1b_2^2)\\=&(a_1^2b_2^2-2a_1a_2b_1b_2+a_2^2b_1^2)-(a_2^2b_1^2-a_1a_2b_2^2-a_1a_2b_1^2+a_1^2b_2^2)\\=&a_1a_2(b_1^2-2b_1b_2+b_2^2)=a_1a_2(b_1-b_2)^2.\end{aligned}$$

因此

$$\Delta=4a_1a_2\Big[(b_1-b_2)^2-4(a_1-a_2)(c_1-c_2)\Big],$$

而由于 $a_1a_2\neq0$，恰好有一条公切线，当且仅当

$$(b_1-b_2)^2=4(a_1-a_2)(c_1-c_2). \qquad (*)$$

想一想 两条曲线相切（touch）究竟是甚么意思？怎样把它化成一条方程？

两条曲线相切，是指它们在某一点相交，而且在该点的斜率相同。设

$$d(x)=(a_1-a_2)x^2+(b_1-b_2)x+(c_1-c_2),$$

即两个二次式之差。两条曲线在 x_0 相交，即 $d(x_0)=0$；在该处斜率相等，即 $d'(x_0)=0$。所以它们相切，当且仅当 d 有一个根 x_0 满足 $d'(x_0)=0$，也就是有重根（repeated root）。由于 $a_1\neq a_2$，d 是二次式，而它有重根，正正是当它的判别式 $(b_1-b_2)^2-4(a_1-a_2)(c_1-c_2)$ 等于零，这就是条件 $(*)$。

所以，当 $a_1\neq a_2$ 时，两条曲线恰好有一条公切线，当且仅当 $(*)$ 成立，亦即当且仅当它们相切。　　（在这个情况下，唯一的公切线自然就是切点处的切线。）

$a_1=a_2$ 的情况

把共同的值记作 a。Q 的 m^2 项消失，再除以 $a\neq0$，条件变成

$$2(b_2-b_1)m+4a(c_2-c_1)+(b_1-b_2)(b_1+b_2)=0.$$

- 若 $b_1\neq b_2$，这条一次方程恰好有一个根，

  $$m=\frac{b_1+b_2}{2}-\frac{2a(c_2-c_1)}{b_2-b_1},$$

  所以恰好有一条公切线。

- 若 $b_1=b_2$，条件化为 $4a(c_2-c_1)=0$。若 $c_1\neq c_2$，则完全没有公切线（其中一条曲线是另一条沿铅垂方向平移而成，所以它们每个斜率的切线都互相平行而不重合）；若 $c_1=c_2$，则两条曲线完全相同，每一条切线都是公切线，共有无限多条。

因此，当 $a_1=a_2$ 时，两条曲线恰好有一条公切线，当且仅当 $b_1\neq b_2$。

验算

对于 $y = x^2$ 和 $y = -x^2 + 2x - \frac{1}{2}$，两者之差是 $2(x - \frac{1}{2})^2$，所以它们在 $x = \frac{1}{2}$ 相切；这时 $Q(m) = -2m^2 + 4m - 2 = -2(m-1)^2$，只有一个根 $m = 1$，正是 $y = x^2$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 的斜率。对于图中的一对曲线 $y = x^2$ 和 $y = x^2 - 4x + 5$，公式给出 $m = -2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$，而两条切线的截距都是 $-\frac{1}{16}$。我们还用精确运算，以数千组随机系数验证了恒等式 $Q(m) = 4a_1a_2(k_2 - k_1)$ 和判别式的化简。

常见错误

- 声称 $Q = 0$ 有重根就“表示”两条曲线相切，却没有解释原因：两者的关联要经过另一个二次式 $d(x)$，而把它们连系起来的正是判别式的恒等式。
- 在 $a_1 = a_2$ 的情况下，遗漏了 $b_1 = b_2$、$c_1 = c_2$ 这个子情况（两条曲线完全相同，有无限多条公切线），或者答成“$b_1 \neq b_2$ 或 $c_1 \neq c_2$”。

STEP 之外

不用曲线上的点，而用它的一族切线来描述曲线，这就是射影几何（projective geometry）中对偶性（duality）的想法：圆锥曲线（conic）的切线 $y = mx + k$ 满足 m 与 k 之间自成一格的二次关系，而两条处于一般位置的圆锥曲线有四条公切线，正如它们相交于四点一样。对于两条对称轴为铅垂的抛物线，无穷远线（line at infinity）与两者都相切，并占去了这四条中的两条，所以余下的普通公切线最多只有两条。想做更多同类的题目，可以试试 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（进阶数学难题集）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。