详细解答

STEP III 2005，第 4 题

纯数学 · 非线性递推关系

STEP III 2005，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/05-s3-q4

关键思路

这个递推关系（recurrence relation）并非线性，但它其实是关于相邻两项之比的。若写成 $u_{n+1} = \rho\, u_n$，递推关系告诉我们下一个比就是 $k - \rho$。因此，这些比在两个和为 k 的数值之间来回交替，其余一切皆由此而来。题目的三个特殊情况，也就化为对这两个比的条件。

解答

归纳法

设 $r = \frac{b}{a}$。把递推关系两边除以 u_{n+1}（当它不等于零时），得

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = k - \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

所以每一个相邻两项之比，都等于 k 减去前一个比。第一个比是 $u_2/u_1 = r$，故下一个比应为

$$c = k - \frac{b}{a} = \frac{ka - b}{a}.$$

注意 $c \neq 0$，因为 $b \neq ka$。另外 $r \neq 0$，因为 $b \neq 0$。这两点合起来保证每一项都不等于零，所以我们永远不会除以零。

设 $P(n)$ 为命题：$u_{2n-1} \neq 0$ 且 $u_{2n} = r\, u_{2n-1}$。$P(1)$ 成立，因为 $u_1 = a \neq 0$ 且 $u_2 = b = ra$。

假设 $P(n)$ 对某个 $n \geq 1$ 成立。那么 $u_{2n} = ru_{2n-1} \neq 0$，而由递推关系得

$$u_{2n+1} = \frac{u_{2n}}{u_{2n-1}}(ku_{2n-1} - u_{2n}) = r\,(k - r)\,u_{2n-1} = (k - r)\,u_{2n} = c\,u_{2n},$$

这正是题目要求的第二条关系式。因此 $u_{2n+1} \neq 0$，并且

$$u_{2n+2} = \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}}(ku_{2n} - u_{2n+1}) = c\,(k-c)\,u_{2n} = (k-c)\,u_{2n+1} = r\,u_{2n+1},$$

因为 $k - c = r$。这就是 $P(n+1)$。根据数学归纳法（induction），对所有 $n \geq 1$，

$$u_{2n} = \frac{b}{a}\,u_{2n-1}, \qquad u_{2n+1} = c\,u_{2n}, \qquad c = k - \frac{b}{a}.$$

想一想 为甚么要把“$u_{2n-1} \neq 0$”写进归纳命题之中?

递推关系要除以 u_n，所以只有当没有任何一项等于零时，这个数列才有意义。把“不等于零”这一点带进归纳过程，便可以在证明公式的同时，一并证明各项均有定义。$b \neq 0$ 和 $b \neq ka$ 这两个条件，正是在这里用上的。

通项公式

每走两步,先乘以 c,再乘以 $\frac{b}{a}$,所以 $u_{2n+1} = \frac{bc}{a}\,u_{2n-1}$。奇数项构成一个等比数列(geometric progression)，首项为 a，公比为 $\frac{bc}{a}$；而每个偶数项都是它前面那个奇数项的 $\frac{b}{a}$ 倍：

$$u_{2n-1} = a\left(\frac{bc}{a}\right)^{n-1} = \frac{b^{n-1}c^{n-1}}{a^{n-2}}, \qquad u_{2n} = b\left(\frac{bc}{a}\right)^{n-1} = \frac{b^n c^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

第 (i) 部分

相邻两项之比依次为 $\frac{b}{a}, c, \frac{b}{a}, c, \ldots$，交替出现，所以数列是等比数列，当且仅当 $c = \frac{b}{a}$，即 $k - \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$:

$$ka = 2b.$$

此时公比为 $\frac{b}{a}$。这与 $b \neq ka$ 并无矛盾，因为当 $b \neq 0$ 时，$ka = 2b \neq b$。

第 (ii) 部分

由通项公式可知，对所有 n 都有 $u_{n+2} = \frac{bc}{a}\,u_n$。所以 $u_{n+2} = u_n$ 对所有 n 成立，当且仅当 $\frac{bc}{a} = 1$，即 $b(ka - b) = a^2$:

$$kab = a^2 + b^2.$$

此时数列为 $a, b, a, b, \ldots$。若要求周期 (period) 恰好是 2 (而不是常数数列), 还需要 $a \neq b$。若 $a = b$，条件变成 $k = 2$，而每一项都等于 a。

第 (iii) 部分

同理，$u_{n+4} = (\frac{bc}{a})^2 u_n$，所以 $u_{n+4} = u_n$ 对所有 n 成立，当且仅当 $(\frac{bc}{a})^2 = 1$，即 $\frac{bc}{a} = \pm 1$。取值 $+1$ 就是第 (ii) 部分的情况，周期为 2（或 1)。若要周期恰好是 4，则需要 $\frac{bc}{a} = -1$,

即 $b(ka-b)=-a^2$：

$$kab=b^2-a^2.$$

此时数列为 $a, b, -a, -b, a, b, \ldots$。由于 $a\neq 0$，我们有 $-a\neq a$，所以它的周期确实是 4，而不会更小。

在 (ii) 和 (iii) 两部分中，条件 $b\neq ka$ 都自动成立。把 $b=ka$ 代入任何一个条件，都会得出 $a^2=0$，而这是不可能的。

验算

试取 $a=1$，$b=2$。当 $k=4$（第 (i) 部分），递推关系给出 $1,2,4,8,16,\ldots$。当 $k=\frac{5}{2}$（第 (ii) 部分），给出 $1,2,1,2,\ldots$。当 $k=\frac{3}{2}$（第 (iii) 部分），给出 $1,2,-1,-2,1,2,\ldots$。我们亦以精确的有理数运算，对大约 2000 组随机选取的 a、b 和 k 执行了这个递推关系。每一组的结果都与通项公式吻合，而且数列是等比数列、周期为 2 或周期为 4，恰好就是上述条件成立的时候。

常见错误

- 递推关系要除以 u_n，却忘记说明为甚么没有任何一项会等于零。
- 把 $\frac{bc}{a}=\pm 1$ 当作 (iii) 的答案。$+1$ 的情况周期是 2。
- 在 (ii) 中，没有留意到 $a=b$、$k=2$ 会得出常数数列。

STEP 之外

代换 $\rho_n=u_{n+1}/u_n$ 把这个非线性递推关系化为一阶映射 $\rho\mapsto k-\rho$。这个映射是一个对合（involution）：连续施行两次便会回到起点，这就是为甚么各个比的周期是 2。通过变量代换来简化非线性的递推关系或微分方程（differential equation），是大学一年级的标准技巧；而研究映射的周期轨道（periodic orbit），正是离散动力系统（discrete dynamical systems）的起点。想找更多同类型的题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。