详细解答

STEP III 2005，第 3 题

纯数学 · 二次函数的复合

STEP III 2005，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/05-s3-q3

关键思路

把两个首一（monic）二次多项式复合（compose），会得到一个首一四次多项式（quartic），而它的系数是互相牵连的：四个参数 p,q,r,s 要产生四个系数 a,b,c,d，但在其中两个系数里，p 和 s 只会以 $2s+p$ 这个组合出现，所以必定有一条关系式要成立。第二种形式其实是同一回事，只是换了个样子：对外层的二次式配方（completing the square），就把 $\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$ 变成（一个平方）$-$（一个常数）。正是这个形式，让我们只用二次公式（quadratic formula）就能解出最后的四次方程。

解答

把二次式复合

把 f 中的 x 换成 $\mathrm{g}(x)$，

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(\mathrm{g}(x)) &= (x^2+rx+s)^2 + p(x^2+rx+s) + q \\ &= x^4 + 2rx^3 + (r^2+2s+p)x^2 + r(2s+p)x + (s^2+ps+q).\end{aligned}$$

所以 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d = \mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$ 对所有 x 成立，当且仅当

$$a = 2r, \qquad b = r^2+(2s+p), \qquad c = r(2s+p), \qquad d = s^2+ps+q.$$

必要性（necessity）。若这样的 p,q,r,s 存在，则 $r = \frac{1}{2}a$ 且 $2s+p = b-r^2 = b-\frac{1}{4}a^2$，所以

$$c = \tfrac{1}{2}a(b-\tfrac{1}{4}a^2), \qquad \text{即} \qquad a^3-4ab+8c = 0.$$

充分性（sufficiency）。反过来，假设 $a^3-4ab+8c=0$。取 $r=\frac{1}{2}a$，s 可取任意值（例

如 $s=0$），然后令 $p=b-\frac{1}{4}a^2-2s$ 及 $q=d-s^2-ps$。第一、第二和第四条等式按构造自然成立，而第三条就是 $c=\frac{1}{2}a(b-\frac{1}{4}a^2)$，正是我们的条件移项后的样子。留意 d 完全不受限制，因为 q 只在常数项中出现。

所以所求的充要条件（necessary and sufficient condition）是

$$\boxed{a^3-4ab+8c=0}$$

（d 可为任意值）。

$(x^2+vx+w)^2-k$ 这个形式

想一想 像 $\mathrm{g}^2+p\,\mathrm{g}+q$ 这样的和，怎样才能改写成一个平方减去一个常数?

把 $\mathrm{g}(x)$ 当作单一个变量，对 g 配方：

$$\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))=(\mathrm{g}(x)+\tfrac{1}{2}p)^2+q-\tfrac{1}{4}p^2=(x^2+rx+s+\tfrac{1}{2}p)^2-(\tfrac{1}{4}p^2-q).$$

现在两个方向都可以证明了。

若条件成立，由第一部分可得 p,q,r,s 使该四次式等于 $\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$，而上面的式子显示它等于 $(x^2+vx+w)^2-k$，其中

$$v=r,\qquad w=s+\tfrac{1}{2}p,\qquad k=\tfrac{1}{4}p^2-q.$$

反过来，$(x^2+vx+w)^2-k$ 本身就是 $\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$，其中 $\mathrm{g}(x)=x^2+vx+w$ 而 $\mathrm{f}(x)=x^2-k$（即 $p=0,q=-k,r=v,s=w$）。根据第一部分的必要性论证，条件 $a^3-4ab+8c=0$ 必定成立。

这样就完成了“当且仅当”（if and only if）的证明。实际运用时，把各个值明确写出来会方便得多：展开得

$$(x^2+vx+w)^2-k=x^4+2vx^3+(v^2+2w)x^2+2vw\,x+(w^2-k),$$

所以我们需要

$$v=\tfrac{1}{2}a,\qquad w=\tfrac{1}{2}(b-\tfrac{1}{4}a^2)=\tfrac{1}{8}(4b-a^2),\qquad k=w^2-d,$$

而这时 x 的系数是 $2vw=\frac{1}{2}a(b-\frac{1}{4}a^2)$，它恰好在条件成立时等于 c。

解四次方程

这里 $a=-4,b=10,c=-12,d=4$，而且

$$a^3-4ab+8c=-64+160-96=0,$$

所以这个方法适用。由公式得

$$v = -2, \qquad w = \tfrac{1}{8}(40 - 16) = 3, \qquad k = 3^2 - 4 = 5,$$

而确实有 $(x^2 - 2x + 3)^2 - 5 = x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 4$（值得亲手展开一次，以策万全）。方程变成

$$(x^2 - 2x + 3)^2 = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x + 3 = \sqrt{5} \text{ 或 } x^2 - 2x + 3 = -\sqrt{5}.$$

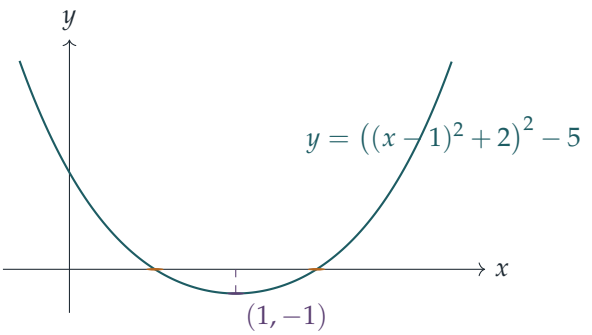
写成 $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$：

- $(x-1)^2 = \sqrt{5} - 2$。由于 $\sqrt{5} > 2$，右边是正数，得出两个实根 $x = 1 \pm \sqrt{\sqrt{5} - 2}$。
- $(x-1)^2 = -2 - \sqrt{5} < 0$，得出一对复数根 $x = 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{2 + \sqrt{5}}$。

所以方程的根是

$$\boxed{x = 1 \pm \sqrt{\sqrt{5} - 2}, \qquad x = 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{2 + \sqrt{5}}}$$

其中只有第一对是实数（如果把题目理解为只求实根，答案就是这两个）。



图像关于 $x = 1$ 对称（它只取决于 $(x-1)^2$），在 $x = 1$ 处取得最小值 $2^2 - 5 = -1$，所以它与横轴恰好相交两次。

验算

- 数值上，$1 \pm \sqrt{\sqrt{5} - 2} \approx 1.4859$ 和 0.5141；把其中任何一个代入 $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 4$，结果与零相差不超过 10^{-14}，代入 $1 \pm 2.0582\,\mathrm{i}$ 亦然。
- 根之和：四个根加起来是 $4 = -a$，正如所料。
- 试试自己构造一个复合式，例如 $\mathrm{f}(x) = x^2 + x$, $\mathrm{g}(x) = x^2 + 2x$：会得到 $x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x$，而 $a^3 - 4ab + 8c = 64 - 80 + 16 = 0$。

常见错误

- 对 d 加上条件：常数项总可以用 q（或 k）来配合，所以 d 是自由的。
- 只证明了“当且仅当”的其中一个方向；只要留意到 $(x^2+vx+w)^2-k$ 本身就是 $f(g(x))$ 的形式，一行就能得出逆命题。
- 求出实根后就停笔，没有留意另一个因式会给出一对复数根。

STEP 之外

条件 $a^3-4ab+8c=0$ 有一个简洁的意义：代入 $x=y-\frac{1}{4}a$ 可消去三次项，而这个条件正好表示所得的降次（depressed）四次式没有 y 项，因此它是 y^2 的二次式。这正是费拉里（Ferrari）四次方程一般解法的起点；更广泛地说，它也是“多项式何时能分解为复合式”这个问题的起点，由此可通往伽罗瓦理论（Galois theory）。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）很适合用来了解哪些多项式方程可用根式求解（solved by radicals）背后的代数。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。