详细解答

STEP III 2005，第 2 题

纯数学 · 可分离变量微分方程

STEP III 2005，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/05-s3-q2

关键思路

这条微分方程（differential equation）是可分离变量（separable）的，积分后得到的对数可以合并成题目所述的形式。至于距离的问题，应求距离的平方 $D = x^2 + y^2$ 的最小值，这样便可避开平方根。在曲线上，y^2 是 x 的显函数，故 D 变成只含 x 的函数，而其导数可以俐落地因式分解。会出现哪些驻点（stationary point），取决于 c 与 a^2 的大小关系。

解答

通解

分离变量（设 $y \neq 0$），

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\int \frac{x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = -\tfrac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + k,$$

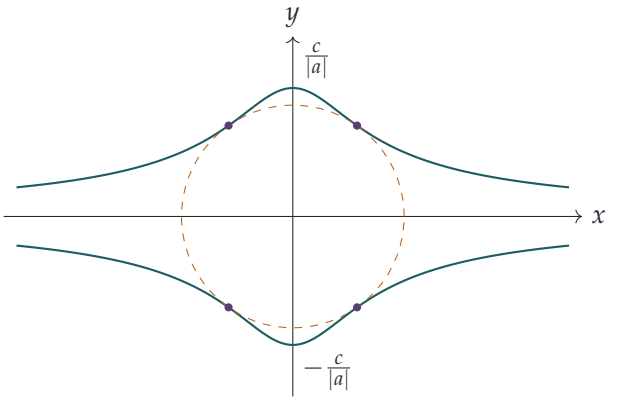
其中 k 为常数。注意 $x^2 + a^2 > 0$ 对任何 x 均成立，因为 $a \neq 0$，所以右边的对数处处有定义。两边乘以二再取指数，

$$y^2 = \frac{\mathrm{e}^{2k}}{x^2+a^2}, \qquad \text{故} \qquad y^2(x^2+a^2) = c^2,$$

其中 $c^2 = \mathrm{e}^{2k}$。解 $y = 0$ 在我们除以 y 时遗失了，它正是 $c = 0$ 的情况，所以 c 确实是任意常数。明确地写出来，通解（general solution）是 $y = c/\sqrt{x^2+a^2}$，其中 c 可正可负。由于曲线的方程中只出现 c^2，以下我们取 $c > 0$。

绘画曲线

曲线 $y^2(x^2+a^2)=c^2$ 由 $y=\pm c/\sqrt{x^2+a^2}$ 两支组成。它对两条坐标轴都对称（方程中只出现 x^2 和 y^2），而且永不与 x 轴相交。在上面的一支，y 在 x^2+a^2 最小时最大，于是在 $x=0$ 处取得极大值 $c/|a|$。当 $|x|\to\infty$ 时，我们有 $y\approx\pm c/|x|\to 0$，所以 x 轴是渐近线（asymptote）。下图所示为 $a=1$、$c=2$ 的情况，并画出了我们将在第 (ii) 部分求得的圆。



x^2+y^2 的导数

设 $D=x^2+y^2$。先利用微分方程，再代入 $y^2=c^2/(x^2+a^2)$，

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x}=2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x-\frac{2xy^2}{x^2+a^2}=2x\left(1-\frac{c^2}{(x^2+a^2)^2}\right).$$

此式在两支上都成立，因为它只涉及 y^2。用积法则（product rule）再求导一次，并利用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+a^2)^{-2}=-4x(x^2+a^2)^{-3}$，

$$\frac{\mathrm{d}^2D}{\mathrm{d}x^2}=2\left(1-\frac{c^2}{(x^2+a^2)^2}\right)+2x\cdot\frac{4c^2x}{(x^2+a^2)^3}=2\left(1-\frac{c^2}{(x^2+a^2)^2}\right)+\frac{8c^2x^2}{(x^2+a^2)^3},$$

即为所求。

D 的驻点出现在 $x=0$ 或 $(x^2+a^2)^2=c^2$ 之处。由于 $x^2+a^2>0$ 及 $c>0$，第二个条件即 $x^2+a^2=c$，亦即 $x^2=c-a^2$。

第 (i) 部分

设 $0<c<a^2$。对任何 x，我们有 $x^2+a^2\geq a^2>c$，所以 $(x^2+a^2)^2>c^2$，而 $\mathrm{d}D/\mathrm{d}x$ 中的括号严格为正。因此 $\mathrm{d}D/\mathrm{d}x$ 的正负号与 x 相同：D 在 $x<0$ 时递减，在 $x>0$ 时递增。所以 D 在 $x=0$ 处取得全局最小值（global minimum），而且别无他处。（与此吻合的是，该处的二阶导数为 $2(1-c^2/a^4)>0$。）

在 $x = 0$ 处，$y^2 = c^2/a^2$，所以最接近原点的点是

$$\left(0,\ \pm\frac{c}{a}\right),$$

与原点的距离为 $c/|a|$。这就是所要求的结果。

第 (ii) 部分

现在设 $c > a^2$。这时有三个驻点：$x = 0$ 和 $x = \pm\sqrt{c - a^2}$。

> **?** **想一想** $x = 0$ 仍然是最近的点吗?

不是。在 $x = 0$ 处，二阶导数为 $2(1 - c^2/a^4)$，它是负数，因为由 $c > a^2 > 0$ 可得 $c^2 > a^4$。所以 $x = 0$ 现在是 D 的局部极大值（local maximum）。在 $x^2 = c - a^2$ 处，我们有 $x^2 + a^2 = c$，所以括号等于零，而

$$\frac{\mathrm{d}^2 D}{\mathrm{d}x^2} = \frac{8c^2(c - a^2)}{c^3} = \frac{8(c - a^2)}{c} > 0,$$

得到局部极小值（local minimum）。要知道它们是全局最小值，可以考察 $\mathrm{d}D/\mathrm{d}x$ 的正负号。当 $x > 0$ 时，括号在 $x^2 < c - a^2$ 时为负，在 $x^2 > c - a^2$ 时为正，所以在 $x \geq 0$ 上，函数 D 一直递减至 $x = \sqrt{c - a^2}$，其后递增。因此 D 在 $x \geq 0$ 上的最小值出现在 $x = \sqrt{c - a^2}$，而根据对称性，它在 $x \leq 0$ 上的最小值出现在 $x = -\sqrt{c - a^2}$。

在这些点上，$y^2 = c^2/(x^2 + a^2) = c^2/c = c$。所以曲线上最接近原点的点是以下四点

$$\left(\pm\sqrt{c - a^2},\ \pm\sqrt{c}\right)$$

（正负号的全部四种组合），与原点的距离为 $\sqrt{2c - a^2}$。

作为覆核，在 $x = 0$ 处距离的平方是 c^2/a^2，而

$$\frac{c^2}{a^2} - (2c - a^2) = \frac{(c - a^2)^2}{a^2} > 0,$$

所以 y 轴上的点确实较远。

验算

- 把 $y = c/\sqrt{x^2 + a^2}$ 代回微分方程，结果成立：$y' = -cx(x^2 + a^2)^{-3/2} = -xy/(x^2 + a^2)$。
- 取 $a = 1$、$c = 2$，以穷举方式搜索 $x^2 + 4/(x^2 + 1)$ 的值，可找到最小值 $3 = 2c - a^2$，出现在 $x = \pm 1 = \pm\sqrt{c - a^2}$，而 $y^2 = 2 = c$。这就是图中的四个圆点，即半径为 $\sqrt{3}$ 的虚线圆与曲线相切之处。
- 当 $c = a^2$ 时，两个答案一致：$\sqrt{c - a^2} = 0$ 且 $\sqrt{c} = c/|a| = |a|$，所以四个点合并成 $(0, \pm|a|)$。

常见错误

- 由“$\mathrm{d}D/\mathrm{d}x = 0$ 且 $\mathrm{d}^2D/\mathrm{d}x^2 > 0$”便断定某点的距离最短。这只能说明它是局部极小值；全局的问题要靠 $\mathrm{d}D/\mathrm{d}x$ 的正负号来解决。
- 忘记了下面的一支，以致在第 (ii) 部分只给出两个点而不是四个。
- 写成 $x^2 + a^2 = \pm c$：负号的情况不可能发生，因为 $x^2 + a^2 > 0$。

STEP 之外

在 $y^2(x^2 + a^2) = c^2$ 的条件下求 $x^2 + y^2$ 的最小值，是一个约束优化（constrained optimisation）问题。在大学里，你会学到拉格朗日乘数（Lagrange multipliers），它毋须先解出其中一个变量便能处理这类问题：在最近的点上，曲线的法线（normal）沿半径方向，这正是虚线圆与曲线相切的原因。当 c 越过 a^2 时，原本在 $x = 0$ 的单一最小值一分为二，这是叉式分岔（pitchfork bifurcation）的一个简单例子。想进一步了解可分离变量方程及其解曲线，可参阅 Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程入门教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。