详细解答

STEP III 2005，第 13 题

概率与统计 • 几何分布

STEP III 2005，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/05-s3-q13

关键思路

由 $w+1$ 至 n 的牌完全不起作用：它们既不派钱，也不会令游戏结束。因此在第 (i) 部分，我们大可不理会它们，只看抽出 $0, 1, \ldots, w$ 的那些抽牌；每一次这样的抽牌，都是从 $w+1$ 个等可能的数字中公平地抽出一个，于是总奖金就是一个几何随机变量（geometric random variable）。在第 (ii) 部分，各次抽牌不再独立（independent），我们把总奖金拆成若干个指示变量（indicator）之和，每张有奖金的牌对应一个，然后利用期望值的线性性质（linearity of expectation）。

解答

若某次抽牌抽出 $0, 1, \ldots, w$ 其中之一，称它为*有关*的抽牌；若抽出 $w+1, \ldots, n$ 其中之一，则称它为*无关*的抽牌。

第 (i) 部分

为何两个事件的概率相同。无关的抽牌不会改变任何事情：玩家甚么也得不到，游戏继续进行。因此玩家的总奖金只取决于有关抽牌的序列：每次非零的有关抽牌可得 £1，而第一次抽出 0 的有关抽牌令游戏结束。所以，玩家恰好赢得 £3，当且仅当在有关的抽牌之中，首三次抽出非零的数字，而第四次抽出 0。这两者是同一个事件，故概率相同。

（每次抽牌都独立地以概率 $\frac{w+1}{n+1} > 0$ 为有关的抽牌，所以有关的抽牌以概率 1 有无限多次，当中自然有第一、第二、第三和第四次；游戏以概率 1 结束。）

想一想 为甚么不论之前发生过甚么，每次有关的抽牌抽出 $0, 1, \ldots, w$ 中任何一个数的可能性都相同?

由于每次抽出的牌都会放回，各次抽牌互相独立，而且每次都在 $\{0, 1, \ldots, n\}$ 上均匀分布（uniform）。已知某一次抽牌是有关的抽牌，它就在 $\{0, 1, \ldots, w\}$ 上均匀分布，因为这 $w+1$ 个结果本来就是等可能的。各次抽牌互相独立，意味着先后各次有关抽牌的数值也互相独立。所以每次有关的抽牌以概率 $\frac{1}{w+1}$ 抽出 0，以概率 $\frac{w}{w+1}$ 抽出非零的数，并且与其他各次独立。

因此

$$P(\text{恰好赢得£3}) = \left(\frac{w}{w+1}\right)^3 \cdot \frac{1}{w+1} = \frac{w^3}{(w+1)^4},$$

正如所求。

一般的 r。把 3 换成 r，用完全相同的论证（首 r 次有关的抽牌非零，第 $(r+1)$ 次为零），可得

$$P(\text{恰好赢得£}r) = \frac{w^r}{(w+1)^{r+1}}, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots$$

设 $q = \frac{w}{w+1}$，上式就是 $(1-q)q^r$，即几何分布（geometric distribution）；这些概率之和为 1，理应如此。

总奖金的期望值。设 X 为以英镑计的总奖金。当 $|q| < 1$ 时，对 $\sum_{r\geq 0} q^r = \frac{1}{1-q}$ 求导，再乘以 q，得 $\sum_{r\geq 0} rq^r = \frac{q}{(1-q)^2}$。所以

$$E(X) = \sum_{r=0}^{\infty} r(1-q)q^r = (1-q) \cdot \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{q}{1-q} = \frac{w/(w+1)}{1/(w+1)} = w.$$

总奖金的期望值是 £w。

第 (ii) 部分

现在抽出的牌不再放回，所以这个游戏等同于把整叠牌洗成一个均匀随机的次序，然后逐张翻开，直至 0 出现为止。在这个次序中，牌 $1, \ldots, w$ 之中每有一张排在牌 0 之前，玩家就得到 £1（排在 0 之前的每张牌都会被抽出，排在它之后的则一张也不会）。

对 $k = 1, \ldots, w$，若牌 k 排在牌 0 之前，设 $I_k = 1$，否则设 $I_k = 0$。总奖金为 $Y = I_1 + I_2 + \cdots + I_w$。

想一想 各个 I_k 并不独立。这有没有影响?

没有：不论各变量之间如何相依，和的期望值总是等于期望值之和。所以我们只需求出 $P(I_k = 1)$。在均匀随机的次序中，把牌 k 与牌 0 的位置对调，就是“k 在 0 之前”的次序与“0 在 k 之前”的次序之间的一个双射（bijection），所以两者等可能，$P(I_k = 1) = \frac{1}{2}$。

因此

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{w} E(I_k) = \sum_{k=1}^{w} \tfrac{1}{2} = \frac{w}{2},$$

正是第 (i) 部分奖金期望值 w 的一半，正如所求。

验算

- 取 $w = n$（每张非零的牌都有奖金）而且不放回，牌 0 的位置在 $1, \ldots, n+1$ 上均匀分布，所以排在它之前的牌数的平均值是 $\frac{n}{2}$，与 $\frac{w}{2}$ 吻合。
- 放回而 $w = 1$ 时，每次有关的抽牌相当于在 0 与 1 之间掷一枚公平硬币，所以 $P(X = r) = 2^{-(r+1)}$ 而 $E(X) = 1$，与 $w^r/(w+1)^{r+1}$ 及 $E(X) = w$ 吻合。
- 取 $n = 5$、$w = 2$，模拟 2×10^5 局游戏，得 $P(X = 3) \approx 0.0995$，对比 $\frac{8}{81} \approx 0.0988$；平均奖金为 1.995，对比 2。对细小的牌叠（例如 $n = 5$、$w = 3$）穷举所有次序，得出不放回时的平均值为 $\frac{3}{2} = \frac{w}{2}$。

常见错误

- 以 $\frac{1}{n+1}$ 作为某次抽牌抽出 0 的机会。这是每次抽牌的机会，但其间可以出现任意多次无关的抽牌；以有关的抽牌为条件，才得出简洁的 $\frac{1}{w+1}$。
- 遗漏 $r = 0$：第一次有关的抽牌可能就是 0，所以有 $\frac{1}{w+1}$ 的概率一无所获。
- 在第 (ii) 部分试图求出奖金的完整分布。这并无必要；用指示变量和线性性质，两行就可完成。

STEP 之外

不理会无关的抽牌，是*稀疏化*（thinning）的一个例子，即只在有趣的事情发生的时刻观察一个过程；这个想法会在马可夫链（Markov chain）（所谓“跳跃链”（jump chain））和泊松过程（Poisson process）中再次出现。把一个计数写成指示变量之和，再利用期望值的线性性质（即使各指示变量并不独立），是大学一年级概率论与组合数学中最有用的技巧之一。这两个想法在 Blitzstein 与 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率论入门教材）以及 Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论导论）中都有详细阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。