详细解答

STEP III 2005，第 12 题

概率与统计 · 无偏估计量的组合

STEP III 2005，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/05-s3-q12

关键思路

整道题都建基于独立（independent）随机变量（random variable）的线性组合（linear combination）的两个事实：期望值（expectation）可以相加，而方差（variance）则要乘上系数的平方后相加。要求某个期望值无论真实的单圈时间是多少都符合要求，就等于要比较系数，于是每个条件都化成一条关于常数的方程。这样，X 就是比赛时间的一个合理估计，而 Y 则利用两种计时方法之间的差异来估计未知的 σ。

解答

设真实的单圈时间为 $\mu_1, \ldots, \mu_4$，真实的比赛时间为 $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$。记

$$S = T_1 + T_2 + T_3 + T_4.$$

那么 $\mathrm{E}(S) = \mu_1 + \cdots + \mu_4 = \mu$，而且由于 $T_1, \ldots, T_4$ 互相独立（各计时员互相独立），$\mathrm{Var}(S) = 4\sigma^2$。另外 $\mathrm{E}(T) = \mu$，$\mathrm{Var}(T) = \sigma^2$，而 T 与 S 独立，因为 S 只取决于另外四位计时员。

求 X

对于 $X = aT + bS$，

$$\mathrm{E}(X) = a\mu + b\mu = (a+b)\mu.$$

无论真实的单圈时间是多少，这个值都必须等于 μ，特别是对某个 $\mu \neq 0$ 也要成立；因此

$$a + b = 1.$$

由 T 与 S 的独立性，

$$\operatorname{Var}(X) = a^2 \operatorname{Var}(T) + b^2 \operatorname{Var}(S) = \sigma^2(a^2 + 4b^2) = \sigma^2(a^2 + 4(1-a)^2).$$

二次式 $a^2 + 4(1-a)^2 = 5a^2 - 8a + 4$ 的首项系数为正，所以它在导数 $10a - 8$ 等于零之处取得最小值，即 $a = \frac{4}{5}$。（用配方法（completing the square）：$5a^2 - 8a + 4 = 5(a - \frac{4}{5})^2 + \frac{4}{5}$。）因此 $a = \frac{4}{5}$，$b = \frac{1}{5}$，而

$$X = \tfrac{4}{5}T + \tfrac{1}{5}(T_1 + T_2 + T_3 + T_4), \qquad \operatorname{Var}(X) = \tfrac{4}{5}\sigma^2.$$

这个结果合情合理：T 的可靠程度是 S 的四倍（方差是 σ^2 对 $4\sigma^2$），所以它得到四倍的权重。

求 Y

对于 $Y = cT + dS$，我们利用 $\mathrm{E}(Y^2) = \operatorname{Var}(Y) + (\mathrm{E}(Y))^2$：

$$\mathrm{E}(Y^2) = \sigma^2(c^2 + 4d^2) + (c+d)^2\mu^2.$$

想一想 无论真实的单圈时间是多少，这个式子怎样才能都等于 σ^2？

常数 c、d 不可以依赖 μ，但 μ 可以是任何正数。这个式子是 $\sigma^2(c^2 + 4d^2)$ 加上 μ^2 的某个倍数，所以要它在 μ 变动时仍然等于 σ^2，μ^2 的系数就必须为零：$(c+d)^2 = 0$，所以 $d = -c$。接着我们需要 $\sigma^2(c^2 + 4c^2) = \sigma^2$，即 $c^2 = \frac{1}{5}$。取 $c = 1/\sqrt{5}$，

$$Y = \frac{T - (T_1 + T_2 + T_3 + T_4)}{\sqrt{5}}$$

（取另一个符号会得到 $-Y$，同样可行，因为要紧的只是 Y^2）。所以 Y 量度的是两种计时结果之间的差异；它的期望值是 0，而它的平方是 σ^2 的无偏估计（unbiased estimate）。

这一场比赛

当 $T = 220$ 及 $S = 220.5$ 时，

$$X = \tfrac{4}{5}(220) + \tfrac{1}{5}(220.5) = 176 + 44.1 = 220.1,$$
$$Y = \frac{220 - 220.5}{\sqrt{5}} = -\frac{0.5}{\sqrt{5}}, \qquad Y^2 = \frac{0.25}{5} = 0.05.$$

所以我们估计 $\sigma^2 \approx 0.05$，因而

$\operatorname{Var}(X) = \frac{4}{5}\sigma^2 \approx \frac{4}{5}(0.05) = 0.04$，　　就标准差（standard deviation）而言，$X \approx 0.2$ 秒.

因此我们对真实比赛时间的估计是 220.1 ± 0.2 秒：真实时间大致落在区间

$$[219.9,\ 220.3] \text{ 秒},$$

之内，这里在两边各取一个标准差。如果想要更大的把握，可以在两边各取两个标准差，得到 $[219.7,\ 220.5]$ 秒；若误差服从正态分布（normal distribution），这大约是一个 95% 的区间。要留意 σ^2 只是由 Y^2 的单一个值估计出来的，所以区间的宽度本身也只是一个粗略的估计。

验算

- 当 $a = \frac{4}{5}$ 时，$\mathrm{Var}(X) = \frac{4}{5}\sigma^2$ 比 $\mathrm{Var}(T) = \sigma^2$ 和 $\mathrm{Var}(S) = 4\sigma^2$ 都要小，这正是结合两个独立量度所应有的效果。
- $X = 220.1$ 介乎两个量度值之间，而且远较接近 $T = 220$，即较可靠的那一个。
- 以 200 000 场比赛（$\sigma = 0.7$）进行模拟，所得 X 的平均值与真实时间相差不超过 0.001，$\mathrm{Var}(X) \approx 0.393$，对比 $\frac{4}{5}(0.49) = 0.392$；而 Y^2 的平均值为 0.491，对比 $\sigma^2 = 0.49$。

常见错误

- 把方差取作 $\mathrm{Var}(S) = \sigma^2$ 或 $16\sigma^2$：正确的是 $4\sigma^2$，即四个独立方差之和。
- 忘记了 $\mathrm{E}(Y^2)$ 中的 $(\mathrm{E}\,Y)^2$ 一项，而正是这一项迫使 $d = -c$。
- 把 $Y^2 = 0.05$ 当作 X 的方差，而没有乘上 $\frac{4}{5}$。

STEP 之外

X 是两个估计的最小方差无偏线性组合：一般的法则是以每个独立估计的方差的倒数作为其权重，这是荟萃分析（meta-analysis）中逆方差加权（inverse-variance weighting）的基础，也是最小二乘法（least squares）的高斯–马可夫定理（Gauss–Markov theorem）的基础。Y^2 是 σ^2 的无偏估计量（estimator），就像以 $n-1$ 作除数的样本方差（sample variance）一样。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）仔细讲解了和的期望值与方差，而大学的第一门统计课程则会正式探讨估计量与置信区间（confidence interval）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。