详细解答

STEP III 2005，第 11 题

力学 • 刚体平衡

STEP III 2005，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/05-s3-q11

关键思路

转轴与各杆组成一个绕固定水平轴转动的刚体（rigid body），所以只需一个角 θ 便能描述整个系统，而能量自然是最合适的工具。势能（potential energy）是三个余弦之和，它们的角度相差 $\frac{2}{3}\pi$；把它们合并，便得到单一的表达式 $A\cos\theta + B\sin\theta$，这其实是一个乔装了的余弦波。一旦写成这个形式，平衡位置、它们的稳定性，以及越过最高点所需的能量，全都可以直接读出。

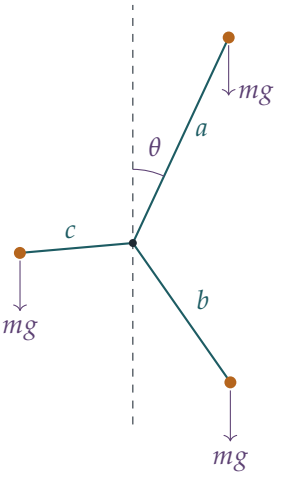
解答

能量

我们把各粒子视为轻质刚杆上的质点，并假设轴承光滑，因此没有能量损失。如图所示，所有角度均由向上的铅垂线起按顺时针方向量度。于是长度为 a、b、c 的杆与向上的铅垂线所成的角分别是 θ、$\theta + \frac{2}{3}\pi$ 和 $\theta + \frac{4}{3}\pi$，所以各粒子在转轴之上的高度为

$$a\cos\theta, \qquad b\cos\left(\theta + \tfrac{2}{3}\pi\right), \qquad c\cos\left(\theta + \tfrac{4}{3}\pi\right)$$

。



利用 $\cos\frac{2}{3}\pi = \cos\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}$、$\sin\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 和 $\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$，可得

$$\cos\left(\theta + \tfrac{2}{3}\pi\right) = -\tfrac{1}{2}\cos\theta - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta, \qquad \cos\left(\theta + \tfrac{4}{3}\pi\right) = -\tfrac{1}{2}\cos\theta + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta.$$

取转轴为势能的零点，

$$\begin{aligned} V &= mg\left[a\cos\theta + b\cos\left(\theta + \tfrac{2}{3}\pi\right) + c\cos\left(\theta + \tfrac{4}{3}\pi\right)\right] \\ &= mg\left[\tfrac{1}{2}(2a - b - c)\cos\theta - \tfrac{\sqrt{3}}{2}(b - c)\sin\theta\right]. \end{aligned}$$

每个粒子都以角速度（angular velocity）$\dot\theta$ 绕转轴作圆周运动，所以它们的速率分别是 $a\dot\theta$、$b\dot\theta$、$c\dot\theta$。各杆为轻杆，因此总能量为

$$E = \tfrac{1}{2}m\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\dot\theta^2 + \tfrac{1}{2}mg\left[(2a - b - c)\cos\theta - \sqrt{3}\,(b - c)\sin\theta\right].$$

平衡

系统在 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}\theta = 0$ 之处处于平衡（equilibrium），即

$$-\tfrac{1}{2}mg\left[(2a - b - c)\sin\theta + \sqrt{3}\,(b - c)\cos\theta\right] = 0.$$

由于 $a > b$ 且 $a > c$，我们有 $2a - b - c > 0$。所以在平衡位置 $\cos\theta \neq 0$：若 $\cos\theta = 0$，则 $\sin\theta = \pm 1$，方括号内的值便是 $\pm(2a - b - c) \neq 0$。两边除以 $\cos\theta$，得

$$\tan\theta = -\frac{(b - c)\sqrt{3}}{2a - b - c},$$

这正是所求。这个论证也可以倒过来：任何满足此方程的 θ 都使 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}\theta = 0$。所以平衡位置恰好就是此方程的解。

恰好两个平衡位置，以及哪一个稳定

正切函数的周期为 π，并且在每个有定义而长度为 π 的区间上，每个实数值都恰好取一次。所以方程在 $0 \le \theta < 2\pi$ 内恰好有两个解，两者相差 π。这就是两个平衡位置。

要判断稳定性（stability），可把 V 写成单一余弦。设

$$A = \tfrac{1}{2}(2a - b - c), \qquad B = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}(b - c),$$

则 $V = mg(A\cos\theta + B\sin\theta)$。于是

$$\begin{aligned} 4(A^2 + B^2) &= (2a - b - c)^2 + 3(b - c)^2 \\ &= 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab - 4bc - 4ca \\ &= 2\left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right] = 4R^2, \end{aligned}$$

所以 $A^2 + B^2 = R^2$，而由于各长度互不相同，$R > 0$。选取 α 使 $\cos\alpha = A/R$ 及 $\sin\alpha = B/R$。由于 $A > 0$ 且 $B < 0$，故 $-\frac{1}{2}\pi < \alpha < 0$。于是

$$V = mgR\cos(\theta - \alpha).$$

两个平衡位置是 $\theta = \alpha$，该处 $V = mgR$ 为极大值；以及 $\theta = \alpha + \pi$，该处 $V = -mgR$ 为极小值。

> **想一想** 为甚么 V 取极小值就代表稳定?

这里 $V''(\theta) = -mgR\cos(\theta - \alpha)$。在 $\theta = \alpha + \pi$ 时，它等于 $mgR > 0$，所以微小的位移会令势能上升。总能量既然固定，系统便不能走得太远，只会在这个位置附近振动。在 $\theta = \alpha$ 时，$V'' = -mgR < 0$：微小的位移令 V 下降，动能（kinetic energy）增加，系统便会远离该位置。所以稳定平衡位置是 $\theta = \alpha + \pi$，即满足 $\frac{1}{2}\pi < \theta < \pi$ 的那一个，该处 $\cos\theta < 0$ 而 $\sin\theta > 0$。在这个位置，最长的杆 a 指向水平线以下，与向下的铅垂线成角 $|\alpha|$。另一个平衡位置满足 $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$，杆 a 在水平线以上，是不稳定的。

完整转圈

由于轴承光滑，而重力是保守力（conservative force），所以能量守恒。记 $I = m(a^2 + b^2 + c^2)$，则

$$\tfrac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgR\cos(\theta - \alpha) = E.$$

要完整地转圈，系统必须越过每一个角度，尤其要越过 $\theta = \alpha$，该处 V 取其最大值 mgR。由于处处都有 $\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \ge 0$，这就需要 $E \ge mgR$。设 ω 为系统经过稳定位置 $\theta = \alpha + \pi$ 时的角速度，该处 $V = -mgR$。于是 $E = \frac{1}{2}I\omega^2 - mgR$，条件变成

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 - mgR \ge mgR \quad \Longleftrightarrow \quad \omega^2 \ge \frac{4mgR}{I} = \frac{4gR}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

所以系统经过稳定平衡位置时，角速度必须至少为 $\sqrt{4gR/(a^2+b^2+c^2)}$，这正是所求。

（在等号成立的临界情况下，系统会缓缓趋近不稳定平衡位置，要经过无限长的时间才到达。严格来说，要完整转一圈，ω 必须严格大于这个值；题目只要求必要的下界。）

验算

- 若 $a=b=c$，则 $R=0$ 且 $V\equiv 0$：三个相等的质量在任何位置都平衡（它们的质心在轴上），而且无论转得多慢都能转过一圈。这与下界趋向零吻合。
- 若 $b=c$，正切条件给出 $\tan\theta=0$。根据对称性，长杆指向正上方（不稳定）或正下方（稳定）。
- 以随机长度作数值检验，可确认 V 的形式、恒等式 $A^2+B^2=R^2$，以及恰好有两个平衡位置，其稳定性亦如上所述。取 $a=3$、$b=2$、$c=0.5$ 及 $g=9.81$，临界角速度为 $2.5406\ \mathrm{rad\,s^{-1}}$。对运动方程逐步作数值计算可见，比这个值低 2% 时系统会摆回来，而高 2% 时则会转过一整圈。

常见错误

- 把位于 $\theta-\frac{2}{3}\pi$ 和 $\theta+\frac{2}{3}\pi$ 的两根杆与图中的位置对调，会令 $\sin\theta$ 项的符号反转，正切条件中的符号亦随之反转。
- 断言“有两个解”，却没有指出 $\cos\theta=0$ 不可能是平衡位置，因而除以 $\cos\theta$ 不会漏掉任何解。
- 把动能写成 $\frac{1}{2}m(a+b+c)^2\dot\theta^2$ 或类似的式子。每个粒子各有自己的速率 $r\dot\theta$，所以转动惯量（moment of inertia）是 $m(a^2+b^2+c^2)$。

STEP 之外

这个系统是一个复摆(compound pendulum),即绕固定轴转动的刚体。它的能量只取决于转动惯量和质心(centre of mass)的位置,而这里质心与轴的距离为 $R/3$。把 $\frac{1}{2}I\dot\theta^2+V(\theta)=E$ 看成 $(\theta,\dot\theta)$ 相平面（phase plane）上的一条曲线，振动在分界线（separatrix）之内，转动在分界线之外，这个图像是大学一年级动力学的核心概念。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）涵盖了刚体转动，以及处理这类问题的能量方法。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。