详细解答

STEP III 2005，第 10 题

力学 · 弹性带与摩擦力

STEP III 2005，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/05-s3-q10

关键思路

一切都取决于一个变量：两圆盘圆心之间的距离 d。橡皮圈的长度由 d 决定，因此它的张力（tension）和所储存的能量都是 d 的简单函数。由此出发，能量的考虑（弹性势能（elastic energy）对比克服摩擦力（friction）所作的功）告诉我们圆盘在哪里停下，而比较橡皮圈的拉力与极限摩擦力（limiting friction），则告诉我们圆盘停下后会否保持静止。

解答

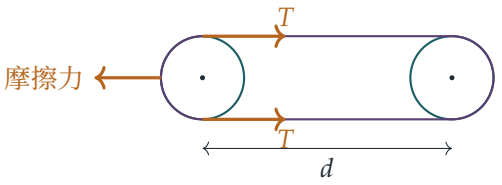
我们把两个圆盘视为完全相同，橡皮圈视为轻而有弹性，且与圆盘的接触是光滑（smooth）的，并假设圆盘一旦滑动，摩擦力的大小就是 μmg。由对称性，两个圆盘总是沿相反方向移动相等的距离，所以橡皮圈的两段直线部分始终保持平行。

把橡皮圈表示为 d 的函数。 当两圆心相距 d 时，橡皮圈绕过每个圆盘半周，再沿着两段长度为 d 的直线部分伸展。所以它的长度是 $2\pi r + 2d$，伸长量（extension）是 $x = 2d$。根据虎克定律（Hooke's law），取弹性模量（modulus of elasticity）$\lambda = \frac{\pi mg}{12}$ 及自然长度（natural length）$2\pi r$，

$$T = \frac{\lambda x}{2\pi r} = \frac{\pi mg}{12} \cdot \frac{2d}{2\pi r} = \frac{mg\,d}{12r}, \qquad E = \frac{\lambda x^2}{2 \cdot 2\pi r} = \frac{mg\,d^2}{12r}.$$

由于接触是光滑的，整条橡皮圈上的张力处处相同。每个圆盘都受两段直线部分拉扯，两者都平行于圆心连线，并指向另一个圆盘。所以每个圆盘所受的合拉力是

$$P = 2T = \frac{mg\,d}{6r}.$$



上图为俯视图，显示左边圆盘向另一个圆盘滑动时所受的水平力。它的重量与法向反作用力（normal reaction）都是铅垂的，并且互相抵消。

释放时 $d = 6r$，所以 $E_0 = 3mgr$ 而 $P = mg$。接触时 $d = 2r$，所以 $E = \frac{1}{3}mgr$。

圆盘互相靠近时的能量。 当圆盘从 $d = 6r$ 向内移动时，每个圆盘都要克服摩擦力 μmg 移动 $\frac{1}{2}(6r - d)$ 的距离。所以克服摩擦力所作的总功是 $\mu mg(6r - d)$。因此总动能（kinetic energy）为

$$\begin{aligned} K(d) &= 3mgr - \frac{mg\,d^2}{12r} - \mu mg(6r - d) \\ &= mg\,(6r - d)\left(\frac{6r + d}{12r} - \mu\right), \end{aligned}$$

其中用到 $3r - \frac{d^2}{12r} = \frac{(6r-d)(6r+d)}{12r}$。

第 (i) 部分

起动。释放时每个圆盘所受的拉力是 $P = mg$，而摩擦力最多只能提供 μmg。所以圆盘开始滑动，当且仅当 $mg > \mu mg$，即 $\mu < 1$。

停下。假设 $\mu < 1$。对于 $d < 6r$，$K(d)$ 只会在 $\frac{6r+d}{12r} = \mu$ 之处为零，即在

$$d^* = 12\mu r - 6r.$$

当 d 由 $6r$ 开始减少时，第二个因子 $\frac{6r+d}{12r} - \mu$ 由 $1 - \mu > 0$ 开始递减，所以在 d 到达 d^* 之前 $K > 0$。圆盘在相撞之前停下，当且仅当在接触之前已到达 d^*，即 $2r < d^* < 6r$：

$$8r < 12\mu r < 12r \iff \tfrac{2}{3} < \mu < 1.$$

若 $\mu \le \frac{2}{3}$，则 $K(2r) \ge 0$，圆盘会先碰上对方。（当 $\mu = \frac{2}{3}$ 时，它们刚好以零速率互相接触，这不算是“之前”。）

> ? **想一想** 圆盘在 d^* 停下之后，橡皮圈会否令它们再次移动？

在 d^* 处，拉力是 $P = \frac{mg\,d^*}{6r} = (2\mu - 1)mg$。由于 $\mu < 1$，这小于极限摩擦力 μmg，所以静摩擦力（static friction）能把圆盘固定，它们保持静止。结合两个条件，圆盘开始滑动但在相撞之前停下，当且仅当 $\frac{2}{3} < \mu < 1$。 ■

第 (ii) 部分

若圆盘至少相撞一次，它们首次到达 $d = 2r$ 时必定是向内移动，而靠近阶段的公式仍然有效。所以紧接首次碰撞之前的总动能是

$$K(2r) = mg\,(4r)\left(\frac{8r}{12r} - \mu\right) = 4mgr\left(\tfrac{2}{3} - \mu\right) = \tfrac{4}{3}mgr(2 - 3\mu),$$

正如所求。（此值为正，恰好当 $\mu < \frac{2}{3}$，与第 (i) 部分一致。）

第 (iii) 部分

首先，由 $\mu^2 < \frac{4}{9}$ 得 $\mu < \frac{2}{3}$，所以根据第 (i) 和第 (ii) 部分，圆盘确实会相撞。碰撞中损失一半动能，所以它们从 $d = 2r$ 反弹时的总动能是

$$K_1 = \tfrac{2}{3}mgr(2 - 3\mu).$$

现在圆盘互相远离。橡皮圈的拉力和摩擦力都指向另一个圆盘，所以每个圆盘都在减速。当间距由 $2r$ 增至 d 时，弹性势能增加了 $\frac{mg(d^2-4r^2)}{12r}$，而克服摩擦力所作的功是 $\mu mg(d - 2r)$，所以

$$K(d) = K_1 - \frac{mg(d^2 - 4r^2)}{12r} - \mu mg(d - 2r).$$

这是 d 的严格递减函数，所以它恰好有一个零点，就是圆盘停下时的间距 d_1。设 $d_1 = 2r + u$，并乘以 $\frac{12r}{mg}$：

$$u^2 + 4r(1 + 3\mu)\,u - 8r^2(2 - 3\mu) = 0.$$

取正根，并化简判别式（discriminant），$(1 + 3\mu)^2 + 2(2 - 3\mu) = 9\mu^2 + 5$，得

$$u = 2r\left(\sqrt{9\mu^2 + 5} - (1 + 3\mu)\right), \qquad d_1 = 2r\left(\sqrt{9\mu^2 + 5} - 3\mu\right).$$

（可以验证 $2r < d_1 \le 6r$，所以橡皮圈保持绷紧，其能量公式仍然适用。）

? **想一想** 圆盘在 d_1 处瞬间静止。甚么因素决定它们会否留在那里？

若橡皮圈的拉力不超过极限摩擦力，它们便保持静止：

$$\frac{mg\,d_1}{6r} \le \mu mg \iff \sqrt{9\mu^2 + 5} - 3\mu \le 3\mu \iff 9\mu^2 + 5 \le 36\mu^2 \iff \mu^2 \ge \tfrac{5}{27},$$

其中两边皆为正数，所以可以取平方。因此若 $\frac{5}{27} < \mu^2 < \frac{4}{9}$，圆盘会相撞、反弹、单调地减速至在 d_1 处静止，然后被静摩擦力永久固定在那里。它们在首次碰撞之后恰好停下一次。 ■

验算

- 当 $\mu = \frac{2}{3}$ 时，第 (i) 部分的停止点 $d^* = 12\mu r - 6r$ 和第 (ii) 部分的动能都给出“以零速率到达 $d = 2r$”，所以两部分在边界上吻合。
- 取 $\mu = 0.5$（在第 (iii) 部分的范围之内）：$K(2r) = \frac{2}{3}mgr$，$K_1 = \frac{1}{3}mgr$，而 $d_1 = 2r(\sqrt{7.25} - 1.5) \approx 2.385r$。该处的拉力 $\approx 0.397mg < 0.5mg$，所以圆盘留在原处。以逐步数值模拟这个运动，重现了以上所有结果，亦重现了多个 $\mu \in (\frac{2}{3}, 1)$ 所对应的停止点 $d^* = 12\mu r - 6r$。对于 $\mu^2 < \frac{5}{27}$（例如 $\mu = 0.42$），模拟显示圆盘停下后再次移动，与预测相符。

常见错误

- 把伸长量当作 d 而不是 $2d$：两段直线部分都被拉长。
- 每个圆盘只计算一个张力：橡皮圈以两股拉着每个圆盘，合共 $2T$。
- 忘记检查圆盘停下后是否保持静止。“速率为零”与“永久静止”是两个不同的条件。

STEP 之外

摩擦力令这成为一个分段系统。每当速度改变正负号，运动方程就会改变；而当外加的力低于摩擦力的临界值时，便会出现“卡住”的状态。这类系统（黏滑运动，stick–slip motion）在大学一年级的动力学课程中会以相平面（phase-plane）方法研究。当 μ 很小时，带有能量损失的反复碰撞会在有限时间内产生无限多次反弹，这值得细想。关于能量方法和摩擦力的更多内容，可参阅 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。